• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	②	**2**	③	**3**	③	**4**	④	**5**	⑤
6	①	**7**	②	**8**	⑤	**9**	①	**10**	④
11	③	**12**	⑤	**13**	①	**14**	④	**15**	③
16	②	**17**	①	**18**	②	**19**	⑤	**20**	④
21	②	**22**	7	**23**	12	**24**	9	**25**	92
26	3	**27**	120	**28**	5	**29**	19	**30**	760

1. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{\frac{3}{2}} \times 4^{-1} = 4^{\frac{3}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2. [출제의도] 집합의 연산 계산하기

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$

$\therefore\ n(A \cap B) = 3$

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n^2}} = 7$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기

$f(8) = 2$

$\therefore\ f^{-1}(2) = 8$

5. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2\times 3 + (10-1)\times 2\}}{2} = 120$$

6. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x+4}+a$의 그래프가 점 $(5, 7)$을 지나므로 $7 = \sqrt{5+4}+a$

$\therefore\ a = 4$

점 $(0, b)$를 지나므로 $b = \sqrt{0+4}+4 = 6$

따라서 $a+b = 10$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(0) + \lim_{x\to 1-} f(x) = 2+0 = 2$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\alpha+\beta = 18,\ \alpha\beta = 6$

$\log_2(\alpha+\beta) - 2\log_2\alpha\beta$

$= \log_2 18 - \log_2 6^2 = \log_2\frac{18}{36} = \log_2\frac{1}{2} = -1$

9. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(x+3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r 3^{n-r}$

상수항이 81이므로 $r=0$일 때, ${}_n\mathrm{C}_0 \times 3^n = 81$

따라서 $n=4$

$(x+3)^4$의 전개식에서 x항은

${}_4\mathrm{C}_1 \times x \times 3^3 = 4 \times 27 \times x = 108x$

따라서 x의 계수는 108

10. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10}(3a_n+b_n-2) = 3\sum_{n=1}^{10}a_n + \sum_{n=1}^{10}b_n - \sum_{n=1}^{10}2$$
$$= 3\times 9 + 7 - 2\times 10$$
$$= 14$$

11. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

구하는 경우의 수는 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$9 = 7+1+1$

$= 6+2+1$

$= 5+3+1$

$= 5+2+2$

$= 4+4+1$

$= 4+3+2$

$= 3+3+3$

따라서 구하는 경우의 수는 7

12. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n} \times \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3n}\times\frac{2n+3}{b_n}\right) = 12$$

$\frac{a_n}{3n}\times\frac{2n+3}{b_n} = c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n = 12$

$\frac{a_n}{b_n} = c_n \times \frac{3n}{2n+3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(c_n\times\frac{3n}{2n+3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}c_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+3}$$
$$= 12\times\frac{3}{2} = 18$$

13. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

a가 밑이므로 $a>0,\ a\neq 1$ ……㉠

진수 $x^2+2ax+5a$는 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2ax+5a>0$이므로

판별식 $D = 4a^2-20a = 4a(a-5) < 0$

$0<a<5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<5,\ a\neq 1$

따라서 정수 a는 2, 3, 4이고 합은 9

14. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

유리함수 $y = \frac{4x+1}{2x+a}$은 $y = \frac{1-2a}{2x+a}+2$이므로

두 점근선의 방정식은 $x = -\frac{a}{2},\ y=2$

두 점근선의 교점은 $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$

점 $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$2 = -\frac{a}{2}+1$

$\therefore\ a=-2$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 문제해결하기

학생 50명 전체집합을 U라 하면 $n(U)=50$

헌혈을 희망한 학생들의 집합을 A라 하면 $n(A)=28$

환경보호활동을 희망한 학생들의 집합을 B라 하면 $n(B^C)=10$이므로 $n(B)=40$

$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B) = n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$= 28+40-n(A\cup B)$

$= 68-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때, 최솟값 40을 갖는다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 28

$n(A\cup B)$는 $A\cup B = U$일 때, 최댓값 50을 갖는다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 18

$\therefore\ M+m = 28+18 = 46$

16. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n+1} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_n-2^{n+1}}{2^n+1} = 0$

$\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n+1} = b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n = 0$

$a_n = \frac{(2^n+1)b_n+2^{n+1}}{2^n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)b_n+2^{n+1}}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)b_n+2\right\} = 2$$

17. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 추론하기

(i) $\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}}\times 5^{\frac{b}{2}}$이 자연수이므로

$a-1 = 2m,\ a = 2m+1$(m은 음이 아닌 정수)

$a = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$b = 2n$(n은 자연수)

$b = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수이므로

$a+1 = 3k,\ a = 3k-1$(k는 자연수)

$a = 2,\ 5,\ 8,\ \cdots$

$b = 3l$(l은 자연수)

$b = 3,\ 6,\ 9,\ \cdots$

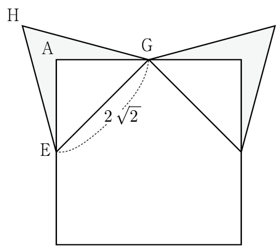
(i), (ii)에 의하여

a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은 11

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

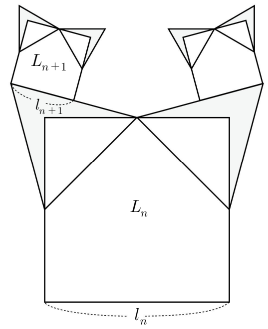
그림 R_1에서



S_1은 정삼각형 EGH의 넓이에서 삼각형 EGA의 넓이를 뺀 값의 2배이므로

$$S_1 = 2\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\times 2\times 2\right\}$$
$$= 2\times(2\sqrt{3}-2)$$
$$= 4(\sqrt{3}-1)$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



정사각형 L_n의 한 변의 길이를 l_n이라 하면
정사각형 L_{n+1}의 한 변의 길이

$l_{n+1}=\frac{l_n}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}l_n$

정사각형 L_n과 정사각형 L_{n+1}은 서로 닮음이고

닮음비는 $l_n : l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{4}$

그러므로 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 얻어진
모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{8}$이다.

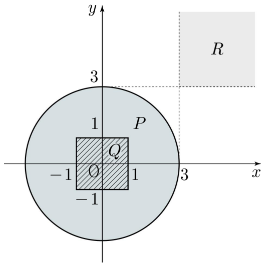
또 새로 얻어지는 모양의 도형의 개수가
2배씩 늘어나므로

S_n은 첫째항이 $4(\sqrt{3}-1)$이고 공비가 $\frac{1}{8}\times2=\frac{1}{4}$인
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$

19. [출제의도] 명제를 활용하여 추론하기

두 실수 x, y에 대한 세 조건 p, q, r의 진리집합을
각각 P, Q, R라 하면
$P=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 9\}$,
$Q=\{(x,y)\mid |x|\le 1$이고 $|y|\le 1\}$,
$R=\{(x,y)\mid x>3$이고 $y>3\}$이므로
P, Q, R를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $Q\subset P$이므로 $q\to p$는 참이다.
ㄴ. $P\subset R^C$이므로 $p\to\sim r$는 참이다.
ㄷ. $R\subset Q^C$이므로 $r\to\sim q$는 참이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 순열 추론하기

(ⅰ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든
경우의 수는 216이다.
(ⅱ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는
눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서
중복을 허락하여 3개를 선택한 후
일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로
이 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=\boxed{27}$이다.
(ⅲ) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로
세 수의 곱이 2인 경우의 수는 2, 1, 1을
일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
4인 경우의 수는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을
일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로
$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+3=6$
6인 경우의 수는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을
일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로
$\frac{3!}{2!}+3!=3+6=9$이다.

그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는
눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인
경우의 수는 $3+6+9=\boxed{18}$이다.
따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는
눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는
$216-27-18=\boxed{171}$이다.
$\therefore\ a=27,\ b=18,\ c=171$
따라서 $3a+2b+c=288$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로
점 Q의 좌표는 $(2t, 0)$
삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의
수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$

$y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{R}\left(0,\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{4}(t^3+t)$

따라서 $\lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}$

22. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+6)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+6)=7$

23. [출제의도] 등차중항 이해하기

a_4는 a_2와 a_6의 등차중항이므로
$2a_4=a_2+a_6=8+16$
$\therefore\ a_4=12$

24. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$a>0$이므로

$(a+4)\left(\frac{1}{a}+1\right)=1+a+\frac{4}{a}+4$

$\ge 5+2\sqrt{a\times\frac{4}{a}}$

$=5+4=9$

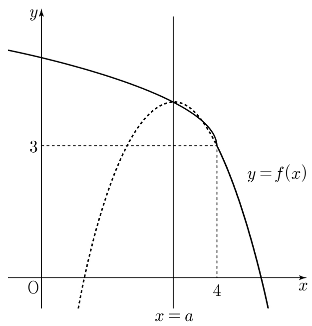
(단, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.)
따라서 최솟값은 9

25. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_{n+1}=2(a_n+2)$의 n에 1, 2, 3, 4를
차례로 대입하면
$a_2=2(a_1+2)=2\times(2+2)=8$
$a_3=2(a_2+2)=2\times(8+2)=20$
$a_4=2(a_3+2)=2\times(20+2)=44$
$a_5=2(a_4+2)=2\times(44+2)=92$

26. [출제의도] 일대일 대응을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되기 위해서는
곡선 $y=-(x-a)^2+4\ (x\ge4)$가 점 $(4, 3)$을
지나야 하고, 곡선 $y=-(x-a)^2+4$의
축이 $x=a$이므로 $a\le4$이다.



$3=-(4-a)^2+4$
$a^2-8a+15=0$
$(a-3)(a-5)=0$
$\therefore\ a=3$ 또는 $a=5$
$a\le4$이므로 $a=3$

27. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k=n(n+1)(4n-1)=S_n$이라 하면
수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여 $n\ge2$일 때
$(2n-1)a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)$
$=n(12n-6)$
$=6n(2n-1)$
$a_n=6n\ (n\ge2),\ a_1=S_1=6$
$\therefore\ a_n=6n\ (n\ge1)$
따라서 $a_{20}=120$

28. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

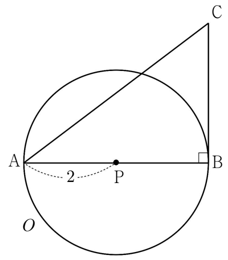
직선 $x=1$이 두 곡선 $y=\frac{4}{x}$, $y=-\frac{6}{x}$과 만나는
점 A의 좌표는 $(1, 4)$, 점 B의 좌표는 $(1, -6)$
직선 $x=n+1$이 곡선 $y=\frac{4}{x}$와 만나는
점 P_n의 좌표는 $\left(n+1,\frac{4}{n+1}\right)$
직선 $x=n+1$이 곡선 $y=-\frac{6}{x}$과 만나는
점 Q_n의 좌표는 $\left(n+1,-\frac{6}{n+1}\right)$
사다리꼴 $\mathrm{ABQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이는

$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\left(10+\frac{4}{n+1}+\frac{6}{n+1}\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}\left(10+\frac{10}{n+1}\right)=5$

29. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

[그림1]과 같이 $x=2$일 때,
원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.
$\therefore\ f(2)=3$
$0<x<2$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.
$\therefore\ f(x)=2\,(0<x<2)$



[그림1]

[그림2]와 같이 원 O가 선분 AC에 접할 때, 접하는 점을 H라 하면 삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HP}}$

$5:3=x:2$

$x=\dfrac{10}{3}$

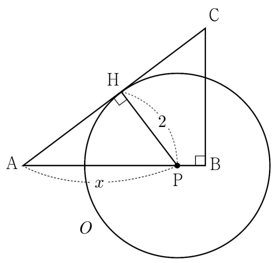
$x=\dfrac{10}{3}$일 때, $f\left(\dfrac{10}{3}\right)=3$

$2<x<\dfrac{10}{3}$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.

$\therefore\ f(x)=4\left(2<x<\dfrac{10}{3}\right)$

$\dfrac{10}{3}<x<4$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore\ f(x)=2\left(\dfrac{10}{3}<x<4\right)$

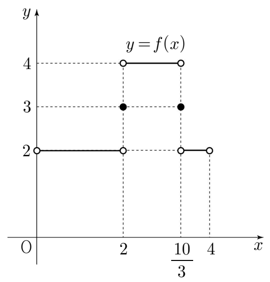


[그림2]

따라서

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (0<x<2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & \left(2<x<\dfrac{10}{3}\right) \\ 3 & \left(x=\dfrac{10}{3}\right) \\ 2 & \left(\dfrac{10}{3}<x<4\right) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=2,\ x=\dfrac{10}{3}$에서 불연속이므로

모든 실수 a의 값의 합은 $2+\dfrac{10}{3}=\dfrac{16}{3}$이다.

$\therefore\ p=3,\ q=16$
따라서 $p+q=19$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,
조건 (가)에 의하여
$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$
$f(1)=a\,(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$
$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$

(i) $a=0$일 때,
$0\le f(2)\le 1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 0 또는 1의 두 가지이고
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n}\mathrm{H}_{2}={}_{n+1}\mathrm{C}_{2}$
$\therefore\ 2\times{}_{n+1}\mathrm{C}_{2}$

(ii) $a=1$일 때,
$1\le f(2)\le 2\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 1 또는 2의 두 가지이고
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
$2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-1}\mathrm{H}_{2}={}_{n}\mathrm{C}_{2}$
$\therefore\ 2\times{}_{n}\mathrm{C}_{2}$

(iii) $a=k$일 때,
$k\le f(2)\le k+1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 k 또는 $k+1$의 두 가지이고
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
$k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-k}\mathrm{H}_{2}={}_{n-k+1}\mathrm{C}_{2}$
$\therefore\ 2\times{}_{n-k+1}\mathrm{C}_{2}$

$0\le k\le n-1$이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2\left({}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{3}\mathrm{C}_2+{}_{2}\mathrm{C}_2\right) \\ &= 2\left({}_{2}\mathrm{C}_2+{}_{3}\mathrm{C}_2+{}_{4}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2\right) \\ &= 2\left({}_{3}\mathrm{C}_3+{}_{3}\mathrm{C}_2+{}_{4}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2\right) \end{aligned}$$

한편, ${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r}\,(1\le r\le n)$이므로

$$a_n=2\times{}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}=\sum_{n=1}^{18}\frac{n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{18}(n^2+n)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{18\times19\times37}{6}+\frac{18\times19}{2}\right)=760$$

[다른 풀이]

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,
조건 (가)에 의하여
$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$
$f(1)=a\,(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$
$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$

(i) $f(2)$를 선택하는 경우는
$f(2)=a$ 또는 $f(2)=a+1$이므로
이 경우의 수는 2 ……㉠

(ii) $f(3)$이 결정되면 $f(1)$은 유일하므로
$f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우만 고려하면 된다.
$f(3)=a+1\ge 1$이므로
$f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우는
1부터 n까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.
이 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$a_n=2\times{}_{n}\mathrm{H}_{3}=2\times{}_{n+2}\mathrm{C}_{3}=2\times\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}=760$$