

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\sin \frac{3}{2}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

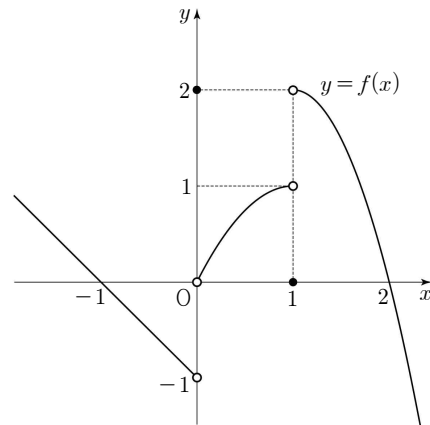
2. 함수 $f(x)=e^x+x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{4x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 곡선 $y = -2x^3 + 5x$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점]

- ① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

7. $\int_{-1}^1 \left(4x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + a \right) dx = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

6. 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

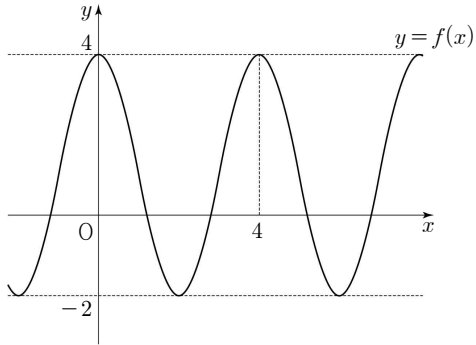
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2}{3^{n+1} + 2a_n} = \frac{2}{5}$$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

8. 그림은 함수 $f(x) = a \cos \frac{\pi}{2b} x + 1$ 의 그래프이다.

두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

9. 부등식 $2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_2(3x+4)$ 를 만족시키는

정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\frac{d}{dx} \int \{f(x) - x^2 + 4\} dx = \int \frac{d}{dx} \{2f(x) - 3x + 1\} dx$$

를 만족시킨다. $f(1)=3$ 일 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + b & (x < 2) \\ 4x^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(1)$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

12. 함수 $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$ 의
값은? [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

13. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - 2t - 3$$

이다. $t = 0$ 부터 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

- ① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

15. 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위에 두 점 $A(a, 1)$, $B(27, b)$ 가 있다.

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼

평행이동한 그래프가 두 점 A , B 의 중점을 지날 때,

상수 m 의 값은? [4점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

16. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 방정식

$$2\cos^2 x + (2 + \sqrt{3})\sin x - (2 + \sqrt{3}) = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① $\frac{3}{4}\pi$

② π

③ $\frac{5}{4}\pi$

④ $\frac{3}{2}\pi$

⑤ $\frac{7}{4}\pi$

17. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 이 세 실근 $\alpha, 0, \beta(\alpha < 0 < \beta)$ 를 갖는다.

$$S = \int_{\alpha}^0 |f'(x)| dx, \quad T = \int_0^{\beta} |f'(x)| dx$$

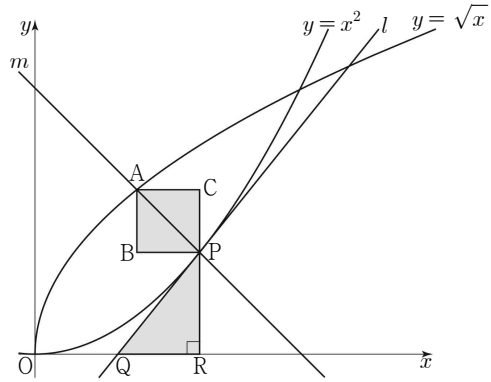
라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄴ. $\alpha + \beta = 0$ 이면 $S = T$ 이다.
 ㄷ. $S < T$ 이고 $f(\alpha)=0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 의 양의 실근의 개수는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(t, t^2)(0 < t < 1)$ 에서의 접선 l 이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 라 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 $f(t)$ 라 하자.
 또한, 점 P 를 지나고 기울기가 -1 인 직선 m 이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 만나는 점을 A 라 할 때, 선분 PA 를 대각선으로 하는 정사각형 $PCAB$ 의 넓이를 $g(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t \times g(t)}{f(t)}$ 의 값은? [4점]



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x) = 2kx^3 - 3(3k+1)x^2 + 18x - 2$ 가 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 최댓값 12를 가질 때, k 의 값을 구하는 과정이다.

함수 $f(x)$ 에서

$$f'(x) = 6kx^2 - 6(3k+1)x + 18 = 6(kx-1)(x-3)$$

$k = \boxed{\text{(가)}}$ 인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로

(i) $0 < k \leq \boxed{\text{(가)}}$ 일 때,

$0 < x < 3$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 따라서 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다. 그러나 $\boxed{\text{(나)}} = 12$ 를 만족하는 k 의 값은 $0 < k \leq \boxed{\text{(가)}}$ 에 존재하지 않는다.

(ii) $k > \boxed{\text{(가)}}$ 일 때,

닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{k}$...	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{k}$ 에서 극대이면서 최대이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 최댓값 12를 가질 때, $k = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 a , b 라 하고,

(나)에 알맞은 식을 $g(k)$ 라 할 때, $\frac{g(a)}{b}$ 의 값은? [4점]

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

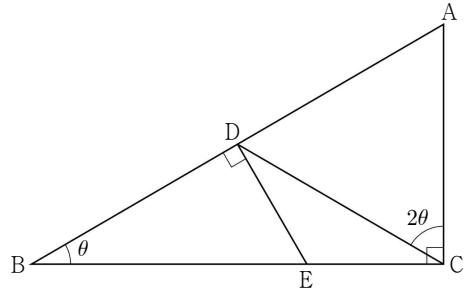
20. 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $\angle CBA = \theta$ 인 직각삼각형

ABC가 있다. 선분 AB 위에 $\angle ACD = 2\theta$ 가 되도록 점 D를

잡고, 선분 BC 위에 $\angle BDE = \frac{\pi}{2}$ 가 되도록 점 E를 잡는다.

삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

21. 삼차함수 $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x - 8k$ (k 는 정수)에 대하여
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt & (x \leq a \text{ 또는 } x \geq b) \\ c & (a < x < b) \end{cases}$$

라 하자. 어떤 정수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 오직 한 점에서만
미분가능하지 않도록 세 실수 a, b, c 를 정할 때,
 $k + a + b + c$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

단답형

22. 함수 $f(x) = \int (2x+1)dx$ 에 대하여 $f(0)=0$ 일 때,
 $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 닫힌 구간 $[1, 5]$ 에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ 의 최댓값을
구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{4} - 9 \right) = 6$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$f(1)=2$, $f'(1)=3$, $g(1)=5$, $g'(1)=2$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) g\left(1 + \frac{3}{n}\right) - f(1)g(1) \right\}$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. 함수 $f(x) = \cos x - 3\sin x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 3h) - f(\pi)}{h}$ 의

값을 구하시오. [3점]

27. 자연수 n 에 대하여 점 $(4n, 3n)$ 을 중심으로 하고, x 축에 접하는 원 C_n 이 있다. 원 C_n 위의 점 P 에 대하여 선분 OP 의 길이가 자연수가 되도록 하는 점 P 의 개수를 a_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

28. 실수 t 에 대하여 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3kx + 2 & (x < 0) \\ x^2 + \frac{4}{3k}x - 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g(x) = 2x + t$$

의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 불연속이 되는 실수 α 의 개수가 2가 되도록 양수 k 를 정할 때, $150k$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$, $\overline{BC} = 12$ 인 이등변삼각형 ABC가

있다. 선분 AB 위에 $\angle DCB = \theta$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 이 되도록

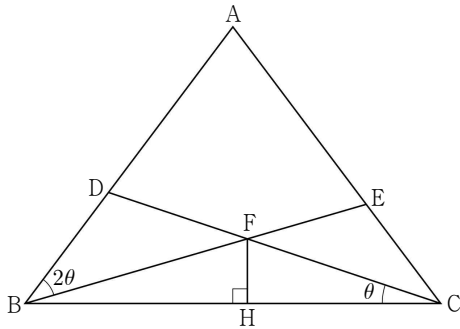
점 D를 잡고, 선분 AC 위에 $\angle EBA = 2\theta$ 가 되도록 점 E를

잡는다. 선분 BE와 선분 CD가 만나는 점을 F,

점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

선분 FH의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 3보다 큰 자연수 n 에 대하여 원 $C: x^2 + y^2 = n$ 이 있다.

삼차함수 $y = f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극대, $x = 1$ 에서 극소이고,

두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$ 이 모두 원 C 위에 있을 때,

그림과 같이 원 C 의 내부는 곡선 $y = f(x)$ 에 의해 4개의 영역

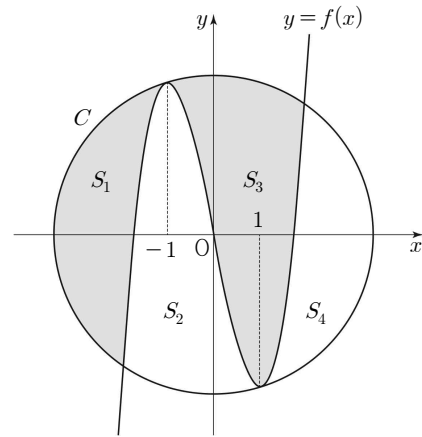
S_1, S_2, S_3, S_4 로 나누어진다. 각 영역 S_k ($k=1, 2, 3, 4$)의

내부의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를

$g_k(n)$ 이라 할 때, $g_1(n) > g_3(n)$ 을 만족시키는

n 의 최솟값은 a 이다. $a + \{g_1(a) \times g_3(a)\}$ 의 값을 구하시오.

(단, 각 영역은 경계선을 포함하지 않는다.) [4점]



※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.