$\overline{\mathrm{AB}}=6-0=6$ 이고, 직선 AB는 x축에 평행하므로 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 $4-(-2)=6$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times6=18$

26. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

n명 중 이 영화를 재관람한 사람의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $0.0706\le p\le0.1294$이므로

$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.0706$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.1294$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 더하면

$2\hat{p}=0.0706+0.1294=0.2$이므로

$\hat{p}=0.1$을 ㉠에 대입하면

$0.1-1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}=0.0706,\ \sqrt{n}=20$

$n=400$이고, $\hat{p}=\frac{m}{n}=0.1$이므로 $m=40$

따라서 $m+n=440$

27. [출제의도] 원의 접선을 이용하여 평면벡터의 내적에 대한 문제를 해결한다.

선분 AB의 중점을 O라 하면 점 Q가 선분 AB를 $5:1$로 외분하는 점이고, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{3}$

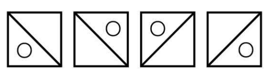
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|+\frac{5}{3}\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}+\frac{5}{3}\times(2\sqrt{3})^2=50\end{aligned}$$

28. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수에 대한 문제를 해결한다.

◇가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$이고,

이 각각에 대하여 ○가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

택한 정사각형에 ○가 그려진 조각을 채우는 경우는 다음의 4가지이다.



따라서 ◇가 그려진 조각과 ○가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3\times4=48$ …… ㉠

(i) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이 채워져 있는 정사각형을 채우는 경우
◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는
2개의 정사각형 각각에서 2개의 방법이 있으므로
$2\times2=4$

(ii) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이 채워져 있지 않은 정사각형을 채우는 경우
☆가 그려진 조각이 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 2,
택한 정사각형에 ☆가 그려진 조각을 채우는 경우의 수는 4,
◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는 2이므로
$2\times4\times2=16$

따라서 ☆가 그려진 조각과 ◎가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 $4+16=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $48\times20=960$

29. [출제의도] 공간벡터의 성분과 내적을 이용하여 벡터의 크기에 대한 문제를 해결한다.

점 P는 점 A가 중심이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 임의의 점이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|&=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\\&\le|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$도 최대가 되므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$는 평행하다.

점 Q의 좌표를 (x,y,z)라 하면 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\sqrt{3},0)$

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x-3,y,z)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2=(x-3)^2+y^2+z^2=12$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}&=(1,\sqrt{3},0)\cdot(x-3,y,z)\\&=(x-3)+\sqrt{3}y+0=6\end{aligned}$$

따라서 점 Q는 구 $(x-3)^2+y^2+z^2=12$와 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$이 만나서 생기는 원 위의 점이다. 이 원을 C, 원 C의 중심을 D라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|\cos\theta$에서

$6=2\times2\sqrt{3}\times\cos\theta$

이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$는 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$의 법선벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$와 평행하고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|\cos\theta=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\frac{9}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$

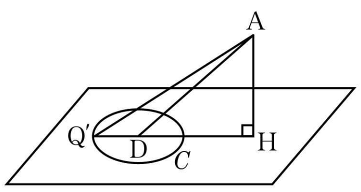
점 A에서 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|-1+0-9|}{\sqrt{1+3}}=5$이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2=25+|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$도 최대가 된다.

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$가 최대인 경우는 직선 HQ가 원 C의 중심 D를 지날 때이고 이때 점 Q의 위치를 Q′이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|$



$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\frac{11}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-6\right)$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2}=\sqrt{73-25}=4\sqrt{3}$이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|$은 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같으므로

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|=4\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|^2=25+75=100$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은 10이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 12이다.

30. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분에 대한 문제를 해결한다.

(나)에서 $x=0$일 때 $g(1)=0$

$g(x+1)=\int_0^x\{f(t+1)e^t-f(t)e^t+g(t)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$f(x+1)-f(x)=\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}$

임의의 실수 t에 대하여

$\int_0^t\{f(x+1)-f(x)\}dx=\int_0^t\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\int_0^t f(x+1)dx-\int_0^t f(x)dx\\&=\int_1^{t+1}f(x)dx-\int_0^t f(x)dx\\&=\int_t^{t+1}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\ \cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{우변})&=\int_0^t\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx\\&=\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx-\int_0^t g(x)e^{-x}dx\end{aligned}$$

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx$에서

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx=\Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t+\int_0^t g(x+1)e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}(\text{우변})&=\Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t+\int_0^t\{g(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx\\&=g(t+1)e^{-t}-g(1)-\int_0^t\pi(e+1)\sin(\pi x)dx\\&=g(t+1)e^{-t}+\Big[(e+1)\cos(\pi x)\Big]_0^t\\&=g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)\ \cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$\int_t^{t+1}f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)$

$g(x+1)=g(x)-\pi(e+1)\sin(\pi x)e^x$에서

$g(0)=g(1)=g(2)=\cdots=g(9)=0$

$\int_1^{10}f(x)dx=\sum_{n=1}^{9}\int_n^{n+1}f(x)dx$

$=\sum_{n=1}^{9}\left\{\int_0^1 f(x)dx+g(n+1)e^{-n}+(e+1)\cos(\pi n)-(e+1)\right\}$

$=9\int_0^1 f(x)dx+0+(e+1)\sum_{n=1}^{9}\{\cos(\pi n)-1\}$

$=9\left(\frac{10}{9}e+4\right)+(e+1)\times(-10)=26$

수학(나형) 정답

1	③	2	④	3	①	4	⑤	5	⑤
6	④	7	⑤	8	⑤	9	③	10	②
11	④	12	②	13	②	14	①	15	②
16	③	17	①	18	①	19	③	20	④
21	②	22	112	23	4	24	27	25	15
26	15	27	19	28	47	29	142	30	340

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 계산한다.

$\log_2 24-\log_2 3=\log_2\frac{24}{3}=\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

2. [출제의도] 명제와 진리집합의 관계를 이해한다.

주어진 명제가 참이 되기 위해서는

$\{x\mid x-2=0\}\subset\{x\mid x^2-ax+a=0\}$이어야 하므로

$2^2-2a+a=0$

따라서 $a=4$

3. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 계산한다.

같은 것이 있는 순열이므로 $\frac{5!}{3!\times2!}=10$

4. [출제의도] 배반사건을 이용하여 확률을 구한다.

두 사건 A, B가 서로 배반이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

5. [출제의도] 유리함수의 정의역과 치역을 이해한다.

주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ne\frac{7}{2}\text{인 실수}\right\}$이고,

치역은 $\{y\mid y\ne a\text{인 실수}\}$

따라서 정의역과 치역이 서로 같아야 하므로 $a=\frac{7}{2}$

6. **[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분의 값을 계산한다.**

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2-x^3-x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}3x^2\,dx=\Big[x^3\Big]_{-3}^{3}=54$

7. **[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.**

각 상자에 공이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣어야 하므로 3개의 상자에 공을 1개씩 미리 넣고 남은 공 3개를 3개의 상자에 넣는다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

8. **[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고 문제를 해결한다.**

$\sqrt[3]{2m}=(2m)^{\frac{1}{3}}$ 이 자연수이므로 $m=2^2\times k^3$ (k는 자연수)꼴이다. 135 이하의 자연수 중 m이 될 수 있는 값은 $2^2\times1^3$, $2^2\times2^3$, $2^2\times3^3$ 뿐이다.

또, $\sqrt{n^3}=n^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수이므로 $n=l^2$ (l은 자연수)꼴이다. 9 이하의 자연수 중 n이 될 수 있는 값은 1^2, 2^2, 3^2 뿐이다.
따라서 $m+n$의 최댓값은 $108+9=117$

9. **[출제의도] 등차수열의 일반항을 이용하여 극한값을 구한다.**

$x=-1$이 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 근이므로 $a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$이다.
$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\neq0)$, 공차를 d라 하면
$a_n=a+(n-1)d$, $a_{n+2}=a+(n+1)d$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 곱 $(-1)\times b_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ 이므로

$b_n=-\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=-\dfrac{a+(n+1)d}{a+(n-1)d}$

(i) $d=0$인 경우, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\dfrac{a}{a}=-1$

(ii) $d\neq0$인 경우, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{dn+a+d}{dn+a-d}=-1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-1$

10. **[출제의도] Σ의 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.**

자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 영역 S가 만나는 점 중 y좌표가 정수인 점들은
$(n,1)$, $(n,2)$, $(n,3)$, $\cdots$, $(n,2n)$
이 점들의 x좌표의 합은 $n\times2n=2n^2$이고,
y좌표의 합은 $1+2+3+\cdots+2n$

그러므로 $a_n=2n^2+\sum\limits_{k=1}^{2n}k=2n^2+\dfrac{2n(2n+1)}{2}=4n^2+n$

따라서 $a_{10}-a_5=(4\times10^2+10)-(4\times5^2+5)=305$

11. **[출제의도] 표준정규분포를 이용하여 문제를 해결한다.**

확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\leq9-2a)=\mathrm{P}(X\geq3a-3)$이므로 $\dfrac{(9-2a)+(3a-3)}{2}=5$에서 $a=4$

따라서 $\mathrm{P}(9-2a\leq X\leq3a-3)$

$=\mathrm{P}(1\leq X\leq9)=\mathrm{P}\left(\dfrac{1-5}{2}\leq Z\leq\dfrac{9-5}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq2)=2\times\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

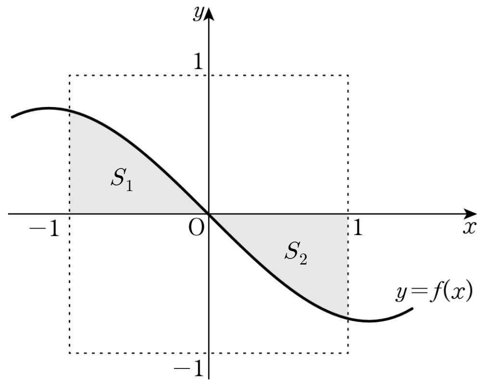
$=2\times0.4772=0.9544$

12. **[출제의도] 함수의 증가, 감소를 이용하여 문제를 해결한다.**

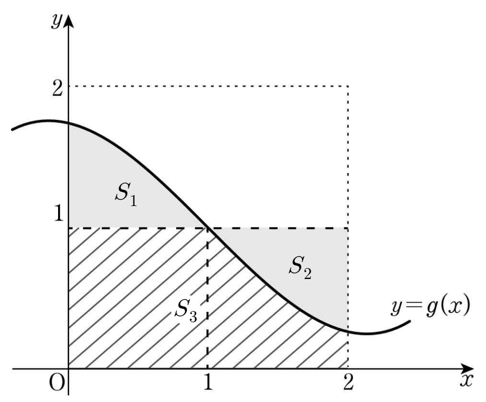
주어진 그래프의 개형에서 $f'(x)$의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
(i) $f'(x)>0$인 경우
$f'(x)>0$인 구간 $(-3,2)$에서 부등식 $f(x)-2\leq0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1
(ii) $f'(x)\leq0$인 경우
$f'(x)\leq0$인 구간 $[2,7)$에서 부등식 $f(x)-2\geq0$을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4
따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5

13. **[출제의도] 평행이동의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구한다.**

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
그림과 같이 색칠된 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 $S_1=S_2$



함수 $y=g(x)$의 그래프에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3이라 하면 $\int_0^2 g(x)dx=S_1+S_3=S_2+S_3=2\times1=2$



14. **[출제의도] 함수가 연속이 되는 조건을 이용하여 문제를 해결한다.**

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)\times\lim\limits_{x\to2+}g(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)\times\lim\limits_{x\to2-}g(x)=0$이고

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=0$

같은 방법으로 $f(-2)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=0$

그러므로 $f(x)=(x+2)(x-2)$
함수 $f(x-a)g(x)=(x-a+2)(x-a-2)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는 $a-2=2$ 또는 $a+2=-2$이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$
따라서 구하는 값은 $4\times(-4)=-16$

15. **[출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

A와 B가 각각 주사위를 5번씩 던진 후, A는 1의 눈이 2번, B는 1의 눈이 1번 나왔고, C가 주사위를 3번째 던졌을 때 처음으로 1의 눈이 나왔으므로 A가 승자가 되기 위해서는 C가 주사위를 4번째, 5번째 던졌을 때 모두 1이 아닌 눈이 나와야 한다.
주사위를 1번 던질 때, 1이 아닌 눈이 나올 확률은 $\dfrac{5}{6}$이므로 A가 승자가 될 확률은 $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{36}$

또, C가 승자가 되기 위해서는 C가 주사위를 4번째, 5번째 던졌을 때 모두 1의 눈이 나와야 하므로 C가 승자가 될 확률은 $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

따라서 A 또는 C가 승자가 될 확률은

$\dfrac{25}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$

[다른 풀이]

B가 승자가 되기 위해서는 C가 주사위를 4번째, 5번째 던졌을 때 1의 눈이 1번, 1이 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 B가 승자가 될 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{18}$

따라서 A 또는 C가 승자가 될 확률은 여사건의 확률에 의하여 $1-\dfrac{5}{18}=\dfrac{13}{18}$

16. **[출제의도] 두 점 사이의 거리를 이용하여 삼차함수의 극댓값과 극솟값의 차를 구한다.**

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 $f(\alpha)$, $f(\beta)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.
조건에서 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$이므로
$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=10^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2$
$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2-10^2=24^2$
$|f(\beta)-f(\alpha)|=24$
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 24

17. **[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 S_n을 이용하여 수열의 합을 구한다.**

S_n의 이차항의 계수를 a라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$이고 S_n은 $n=30$일 때 최댓값 410을 가지므로
$S_n=a(n-30)^2+410$
$S_{10}=10$이므로 $10=a(10-30)^2+410$에서 $a=-1$
그러므로 $S_n=-(n-30)^2+410$
$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 m의 범위는
$10<m<50$이므로 $p=11$, $q=49$

따라서 $\sum\limits_{k=p}^{q}a_k=\sum\limits_{k=11}^{49}a_k=S_{49}-S_{10}$

$=\{-(49-30)^2+410\}-10=39$

18. **[출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.**

확률변수 X가 가장 큰 값을 갖는 경우는 첫 번째와 6번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이고, 두 번째부터 5번째까지 꺼낸 공이 모두 짝수일 때이므로 $m=\boxed{6}$
(iii) $X=k\ (3\leq k\leq m)$인 경우
9개의 공에서 k개의 공을 차례대로 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{P}_k$
첫 번째와 마지막으로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2$
두 번째부터 $(k-1)$번째까지 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_{k-2}$

그러므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_{k-2}}}{{}_9\mathrm{P}_k}$에서

$f(k)={}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_{k-2}$
따라서 $a=6$, $f(4)={}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_2=240$이므로
$a+f(4)=246$

19. **[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.**

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 ABC와 삼각형 $\mathrm{F_1E_1C}$가 닮음이므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{F_1E_1}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{E_1C}}$
마름모 $\mathrm{D_1BE_1F_1}$의 한 변의 길이를 x라 하면
$2:x=4:(4-x)$이므로 $x=\dfrac{4}{3}$

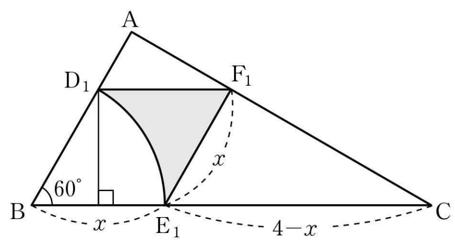
그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 마름모 $D_1BE_1F_1$의 넓이에서 부채꼴 BE_1D_1의 넓이를 뺀 값이므로

$$a_1=\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\sin 60°-\pi\times\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{60°}{360°}=\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$$

그림 R_2에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{4}{9}a_n$이 성립한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$이고, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$$



20. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 이용하여 문제를 해결한다.

1은 집합 X의 원소 중 가장 작은 수이므로 $f(2)\geq 1$

$f(2)\geq 1$이면 $f(2)\geq f(1)$

한편, $f(1)=3$이므로 $f(1)\geq 2$에서 $f(1)\geq f(2)$

그러므로 $f(2)=f(1)=3$

마찬가지로 $f(3)\geq 1$이므로 $f(3)\geq f(1)$

한편, $f(1)=3$이므로 $f(1)\geq 3$에서 $f(1)\geq f(3)$

그러므로 $f(3)=f(1)=3$

$f(4)\geq 1$이므로 $f(4)\geq f(1)=3$

따라서 $f(2)+f(4)$의 최솟값은 6

21. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 삼차함수의 성질을 추론한다.

조건에서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

ㄱ. $f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$

그러므로 $f'(\alpha)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)=\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha\right)^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\beta\right)=-4$$

$(\beta-\alpha)^3=3^3$에서 $\beta-\alpha=3$

그러므로 $\beta=\alpha+3$ (참)

ㄷ. $f(0)=-\alpha^2\beta=16$이고 ㄴ에서 $\beta=\alpha+3$이므로

$\alpha^3+3\alpha^2+16=(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$

$\alpha=-4$이고 $\beta=-1$

그러므로 $\alpha^2+\beta^2=17$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 구한다.

$f(x)=10x^2+12x$에서 $f'(x)=20x+12$

따라서 $f'(5)=100+12=112$

23. [출제의도] 로그의 뜻과 성질을 이용하여 로그의 값을 구한다.

$\log_a b=3$에서 $b=a^3$

따라서 $\log\frac{b}{a}\times\log_a 100=\log\frac{a^3}{a}\times\frac{\log 100}{\log a}$

$$=2\log a\times\frac{2}{\log a}=4$$

24. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-x}{x-5}=8$에서 $\lim_{x\to 5}(x-5)=0$이므로

$\lim_{x\to 5}\{f(x)-x\}=0$

$f(x)-x$도 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x=(x-5)(x+a)$라 하면

$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-x}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+a)=5+a=8$에서 $a=3$

그러므로 $f(x)=(x-5)(x+3)+x$

따라서 $f(7)=2\times 10+7=27$

25. [출제의도] 집합의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구한다.

전체집합 U의 원소 중 제곱하여 일의 자릿수가 1인 원소는 1, 9이고, 제곱하여 일의 자릿수가 4인 원소는 2, 8, 제곱하여 일의 자릿수가 9인 원소는 3, 7, 제곱하여 일의 자릿수가 6인 원소는 4, 6, 제곱하여 일의 자릿수가 5인 원소는 5이다.

(i) $n(A)=2$인 경우

$\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$으로 4개

(ii) $n(A)=4$인 경우

$\{1, 2, 8, 9\}$, $\{1, 3, 7, 9\}$, $\{1, 4, 6, 9\}$, $\{2, 3, 7, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$로 6개

(iii) $n(A)=6$인 경우

$\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$, $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$로 4개

(iv) $n(A)=8$인 경우

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$로 1개

따라서 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는 15

26. [출제의도] 수의 분할을 이용하여 경우의 수를 구한다.

주머니에서 꺼낸 5개의 공의 색이 3종류인 경우는 색깔별 공의 개수가 3, 1, 1이거나 2, 2, 1이다.

(i) 색깔별 공의 개수가 3, 1, 1인 경우

흰 공을 3개 꺼내고 검은색, 파란색, 빨간색, 노란색 중에서 2종류의 색을 정하여 각각 1개씩 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ii) 색깔별 공의 개수가 2, 2, 1인 경우

흰색, 검은색, 파란색 중에서 2종류의 색을 정하여 각각 2개씩 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2$이고, 각각의 경우 꺼내지 않은 3종류의 색 중에서 1종류의 색을 정하여 1개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_1$이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_2\times{}_3C_1=9$

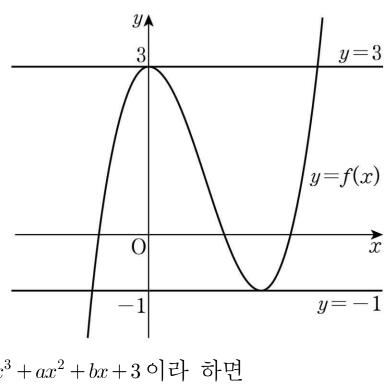
따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+9=15$

27. [출제의도] 미분을 활용하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

따라서 $f(4)=19$

28. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

점심에 한식을 선택하는 사건을 A, 저녁에 양식을 선택하는 사건을 B라 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B\mid A^C)=\frac{1}{4}$

$P(B^C\mid A)=\frac{3}{10}$이므로 $P(B\mid A)=\frac{7}{10}$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(A^C)P(B\mid A^C)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}}{\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{21}{26}$$

따라서 $p+q=26+21=47$

29. [출제의도] 수열의 규칙성을 추측하여 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

a_1이 짝수이므로 $a_1=4k$인 경우와 $a_1=4k+2$인 경우로 나누어 $a_5=5$가 되는 정수 k의 값을 구하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><td>a_1</td><td colspan="3">$4k$</td><td colspan="2">$4k+2$</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td colspan="3">$2k$</td><td colspan="2">$2k+1$</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td colspan="3">k</td><td colspan="2">$2k+4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_4</td><td>a_3이 홀수</td><td colspan="2">a_3이 짝수</td><td colspan="2" rowspan="2">$k+2$</td></tr>
<tr><td>$k+3$</td><td colspan="2">$\frac{k}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_5</td><td rowspan="2">$\frac{k+3}{2}$</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{2}+3$</td><td>$\frac{k}{4}$</td><td>$k+5$</td><td>$\frac{k+2}{2}$</td></tr>
<tr><td>k</td><td>7</td><td>4</td><td>20</td><td>0</td><td>8</td></tr>
</table>

$k=4$인 경우 $a_4=\frac{k}{2}$가 짝수이므로 $a_5\neq\frac{k}{2}+3$

$k=0$인 경우 $a_4=k+2$가 짝수이므로 $a_5\neq k+5$

그러므로 $k=7$ 또는 $k=20$ 또는 $k=8$

a_1이 될 수 있는 수는 28, 80, 34

따라서 구하는 값은 $28+34+80=142$

30. [출제의도] 미분과 적분을 활용하여 조건을 만족시키는 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 조건 (나)에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 $f(x)=x^2$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 조건 (가), (나)에서 $g(0)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)=0$이므로 $g(x)=x(x-a)^2$

$$\int_0^a\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^a\{x^3-(2a+1)x^2+a^2x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a+1}{3}x^3+\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3=36$$

그러므로 $(a-6)(a^3+2a^2+12a+72)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 구하면 $(0, 0)$, $(4, 16)$, $(9, 81)$

$$\int_0^6|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx+\int_4^6\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{3}x^3+18x^2\right]_0^4+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{13}{3}x^3-18x^2\right]_4^6$$

$$=\frac{340}{3}$$

따라서 $3\int_0^a|f(x)-g(x)|dx=340$