• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	⑤	**2**	④	**3**	①	**4**	⑤	**5**	③
6	④	**7**	⑤	**8**	④	**9**	②	**10**	②
11	③	**12**	①	**13**	②	**14**	④	**15**	①
16	③	**17**	③	**18**	②	**19**	②	**20**	③
21	①	**22**	4	**23**	10	**24**	11	**25**	22
26	5	**27**	64	**28**	192	**29**	61	**30**	7

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$2^3\times 4^{\frac{1}{2}}=2^3\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=8\times 2=16$

2. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

$\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$
$$=\frac{1}{3}f'(4)=7$$

따라서 $f'(4)=3\times 7=21$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(3)+\lim_{x\to 1-}f(x)=1+1=2$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_9 a^3b=\log_9 9+\log_9(ab)^2$

$\log_9 a^3b=\log_9 9a^2b^2$

$a^3b=9a^2b^2$에서 $\frac{a}{b}=9$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=1$,

$a_2=a_1+3=1+3=4$,

$a_3=2a_2-1=2\times 4-1=7$,

$a_4=a_3+3=7+3=10$,

$a_5=2a_4-1=2\times 10-1=19$

8. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수), $\theta=\frac{2n}{5}\pi$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $n=2$일 때, $\theta=\frac{4}{5}\pi$

9. [출제의도] 상용로그 이해하기

$\log 10^n=n$, $\log 10^{n+1}=n+1$

$$\log 24^{10}=10\log 24$$
$$=10(3\log 2+\log 3)$$
$$=13.801$$

$n<13.801<n+1$이므로 $n=13$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi=r\times\frac{\pi}{3}$에서 $r=3$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{2-x}+a$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2이므로

$3^2=3^{2-2}+a$, $a=8$

따라서 함수 $f(x)g(x)=8\times 3^x+9$는

닫힌구간 $[1, 3]$에서 $x=1$일 때, 최솟값 33을 갖는다.

12. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{x-1} & (x\neq 1)\\ 4 & (x=1)\end{cases}$$이고

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=4$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0$, $b=-a-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+a+1)$$
$$=3+a=4$$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 $a\times b=-2$

13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$\log_2(x+4)=0$에서 $x=-3$이므로 $\mathrm{A}(-3, 0)$

$\log_2 x+1=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\log_2(x+4)=\log_2 x+1$에서 $x=4$이므로 $\mathrm{C}(4, 3)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times 3=\frac{21}{4}$

14. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{24}(-1)^k a_k$$
$$=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{23}+a_{24}$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{24})-2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{23})$$
$$=\sum_{k=1}^{24}a_k-2\sum_{k=1}^{12}a_{2k-1}$$
$$=(6\times 12^2+12)-2\times(3\times 12^2-12)$$
$$=36$$

15. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$a^x-1=n$에서 $x=\log_a(n+1)$,

$a^x-1=n+1$에서 $x=\log_a(n+2)$이므로

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이 S_n은

$$S_n=\log_a(n+2)-\log_a(n+1)$$
$$=\log_a\frac{n+2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{14}S_n=\sum_{n=1}^{14}\log_a\frac{n+2}{n+1}$$
$$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\cdots+\log_a\frac{16}{15}$$
$$=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{16}{15}\right)$$
$$=\log_a 8$$

$\sum_{n=1}^{14}S_n=6$에서 $\log_a 8=6$, $a^6=8$

따라서 $a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 치역은 $\{y\,|\,-1\leq y\leq 1\}$이고, 주기가 4이다.

따라서 $0\leq x\leq 4$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프가

직선 $y=k$와 두 점에서 만나려면

$-1<k<1$이어야 한다.

$0\leq x\leq 4$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프가

직선 $y=k$와 만나는 두 점의 x좌표를

각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\beta-\alpha>1$일 때,

$f(t)=2$를 만족시키는 t의 값은 존재하지 않고,

$\beta-\alpha<1$일 때,

$f(t)=2$를 만족시키는 t의 값이 유일하지 않다.

$\beta-\alpha=1$일 때,

$f(0)=1$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$

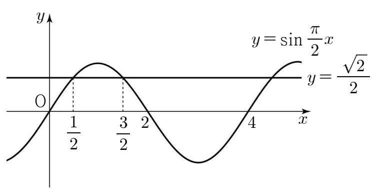
$0\leq t<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<t\leq\frac{3}{2}$일 때, $f(t)=1$

$t=\frac{1}{2}$일 때, $f(t)=2$

$\frac{3}{2}<t\leq 3$일 때, $f(t)=0$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a^2+b^2+k^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3$



17. [출제의도] 수열을 이용하여 추론하기

세 자연수 a, b, d는 $2b=a+d$를 만족시키므로

이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2,

가장 큰 값은 $\boxed{10}$이다.

이 등차수열의 공차를 $k\left(2\leq k\leq\boxed{10}\right)$이라 하면

$1\leq a<a+k<c<a+2k\leq 21$이므로

c가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $k-1$이고

a가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는

$\boxed{21-2k}$이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$\sum_{k=2}^{\boxed{10}}\left\{(k-1)\times\left(\boxed{21-2k}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}(-2k^2+23k-21)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(-2k^2+23k-21)-(-2\times 1^2+23\times 1-21)$$
$$=-2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+23\times\frac{10\times 11}{2}-21\times 10$$
$$=\boxed{285}$$

따라서 $p=10$, $f(k)=21-2k$, $q=285$이므로

$p+q+f(3)=10+285+15=310$

18. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 a가 양수이므로 $a=2$, $c=1$

함수 $f(x)=2\cos bx+1$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2\pi}{b}$

$0\le x\le \frac{2\pi}{b}$에서 방정식 $2\cos bx+1=0$의 해는

$x=\frac{2\pi}{3b}$, $x=\frac{4\pi}{3b}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{2\pi}{3b}$

사각형 ACDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{3b}+\frac{2\pi}{b}\right)\times 3=6\pi$

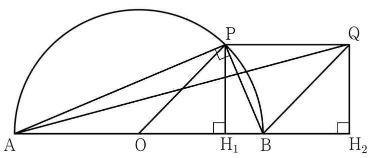
이므로 $b=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{2}{3}x+1$

$0\le x\le 4\pi$에서 방정식 $f(x)=2$의 모든 해는

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$이므로 합은 $\frac{13}{2}\pi$

19. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

직각삼각형 APB에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4-t^2}$이고

직각삼각형 $\mathrm{OH_1P}$에서 $\overline{\mathrm{OH_1}}^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2=1$이므로

직각삼각형 $\mathrm{AH_1P}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\left(1+\overline{\mathrm{OH_1}}\right)^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2$, $4-t^2=2+2\overline{\mathrm{OH_1}}$

따라서 $\overline{\mathrm{OH_1}}=1-\frac{t^2}{2}$

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\sqrt{1-\overline{\mathrm{OH_1}}^2}=\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}$

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\overline{\mathrm{OH_1}}$, $\overline{\mathrm{QH_2}}=\overline{\mathrm{PH_1}}$이므로

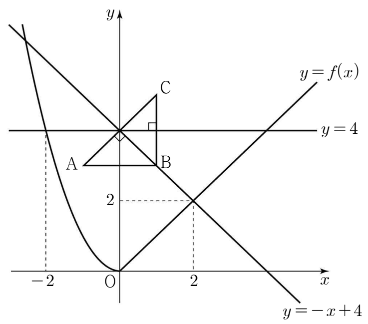
직각삼각형 $\mathrm{AH_2Q}$에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AQ}}&=\sqrt{\left(2+\overline{\mathrm{BH_2}}\right)^2+\overline{\mathrm{QH_2}}^2}\\&=\sqrt{\left(2+\overline{\mathrm{OH_1}}\right)^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2}\\&=\sqrt{\left\{2+\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right\}^2+\frac{t^2}{4}\left(4-t^2\right)}\\&=\sqrt{9-2t^2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{3-\overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}&=\lim_{t\to0+}\frac{3-\sqrt{9-2t^2}}{t^2}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{9-\left(9-2t^2\right)}{t^2\left(3+\sqrt{9-2t^2}\right)}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{2}{3+\sqrt{9-2t^2}}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

20. [출제의도] 함수의 미분가능성 추론하기



그림과 같이 선분 BC의 수직이등분선 $y=4$는 함수 $y=f(x)$ $(x<0)$의 그래프와 점 $(-2, 4)$에서 만나고, 선분 AC의 수직이등분선 $y=-x+4$는 함수 $y=f(x)$ $(x\ge0)$의 그래프와 점 $(2, 2)$에서 만난다.

점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값이 최대가 되도록 하는 점 Q는

$x<-2$일 때 점 $\mathrm{B}(1, 3)$,

$-2\le x<2$일 때 점 $\mathrm{C}(1, 5)$,

$x\ge2$일 때 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$이다.

(i) $x<-2$일 때

점 $\mathrm{P}\left(x, x^2\right)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+\left(x^2-3\right)^2=x^4-5x^2-2x+10$

(ii) $-2\le x<0$일 때

점 $\mathrm{P}\left(x, x^2\right)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+\left(x^2-5\right)^2=x^4-9x^2-2x+26$

(iii) $0\le x<2$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x-5)^2=2x^2-12x+26$

(iv) $x\ge2$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로

$g(x)=(x+1)^2+(x-3)^2=2x^2-4x+10$

(i) ~ (iv)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases}x^4-5x^2-2x+10 & (x<-2)\\ x^4-9x^2-2x+26 & (-2\le x<0)\\ 2x^2-12x+26 & (0\le x<2)\\ 2x^2-4x+10 & (x\ge2)\end{cases}$$

ㄱ. $g(0)=26$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2-}g(x)=\lim\limits_{x\to2-}\left(2x^2-12x+26\right)=10$,

$g(2)=\lim\limits_{x\to2+}g(x)=\lim\limits_{x\to2+}\left(2x^2-4x+10\right)=10$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$0\le x\le2$에서 함수 $y=2(x-3)^2+8$은 $x=2$일 때 최솟값 10을 갖고,

$2\le x\le3$에서 함수 $y=2(x-1)^2+8$은 $x=2$일 때 최솟값 10을 가지므로

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다. (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-2-}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to-2-}\frac{x^4-5x^2-2x+10-10}{x+2}=-14$

$\lim\limits_{x\to-2+}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to-2+}\frac{x^4-9x^2-2x+26-10}{x+2}=2$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

$\lim\limits_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0-}\frac{x^4-9x^2-2x+26-26}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\frac{2x^2-12x+26-26}{x}=-12$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\frac{2x^2-12x+26-10}{x-2}=-4$

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}\frac{2x^2-4x+10-10}{x-2}=4$이므로

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은 $-2+0+2=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0-}|2x+a|=|a|$,

$|f(0)|=\lim\limits_{x\to0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0+}\left|x^2+bx+c\right|=|c|$에서

$a=c$ 또는 $a=-c$

조건 (가)에서

4가 함수 $g(t)$의 치역의 원소 중 하나이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재해야 한다.

그러므로 직선 $y=t$가

$x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하고,

$x\ge0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하는

실수 t가 존재해야 한다.

따라서 $a>0$, $b<0$, $c=a$이고

함수 $y=x^2+bx+c$ $(x\ge0)$의 최솟값이 0보다 작아야 한다.

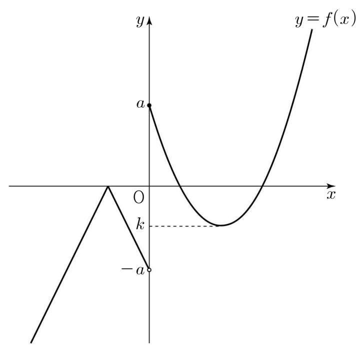
함수 $y=x^2+bx+c$ $(x\ge0)$의 최솟값을 k라 하자.

(i) $-a<k<0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은

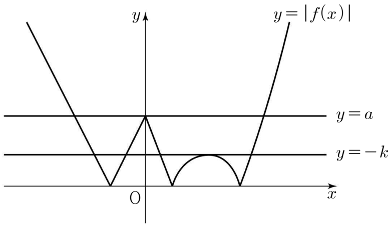
그림과 같으므로 함수 $g(t)$의

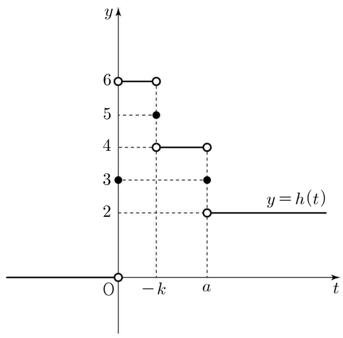
치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.



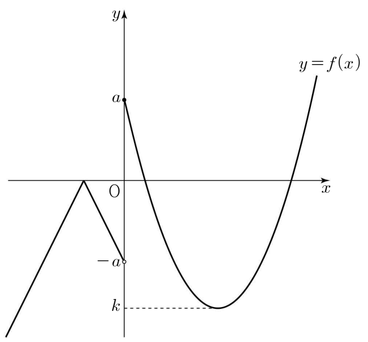
함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과

함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.

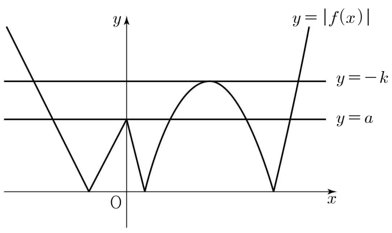


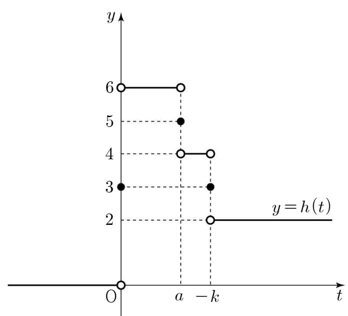


(ii) $k<-a$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.

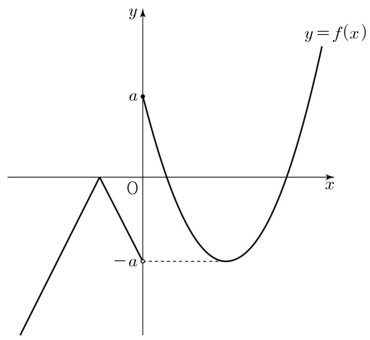


함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.

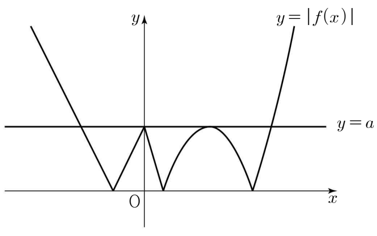


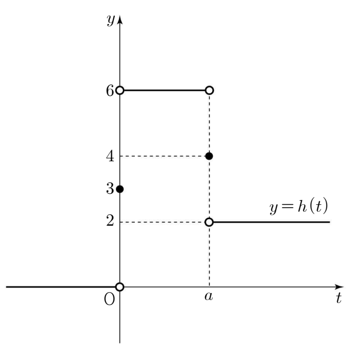


(iii) $k=-a$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.





(i)~(iii)에 의하여
$k=-a$일 때, 함수 $h(t)$가 조건 (나)를 만족시키므로
$a=2$이고 $c=2$, $k=-2$

$x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$이므로

$2-\frac{b^2}{4}=-2$, $b=-4$ $(b<0)$

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -|2x+2| & (x<0) \\ x^2-4x+2 & (x\ge 0) \end{cases}$$

따라서 $f(-2)+f(6)=-2+14=12$

22. [출제의도] 도함수 계산하기

$f'(x)=3x^2+2x-1$이므로 $f'(1)=3+2-1=4$

23. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$4^{x-2}\le 32$에서 $2^{2x-4}\le 2^5$

$2x-4\le 5$, $x\le \frac{9}{2}$

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은
$1+2+3+4=10$

24. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_1=S_1=3$,

$a_4=S_4-S_3=(4^2+4+1)-(3^2+3+1)=8$

따라서 $a_1+a_4=11$

25. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=7$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

$8+2a+b=0$, $b=-2(a+4)$

$f(x)=(x-2)(2x+a+4)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{x-2}$$
$$=a+8=7$$

에서 $a=-1$, $b=-6$

따라서 $f(x)=2x^2-x-6$이므로

$f(4)=32-4-6=22$

26. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=3^x+1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y=\log_3(x-1)$이고,
곡선 $y=\log_3(x-1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선이 $y=f(x)$이므로
$f(x)=\log_3(x-a-1)+b$
곡선 $y=f(x)$의 점근선이 $x=5$이므로
$a+1=5$, $a=4$
곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=3^x+1$의 점근선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표가 6이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(6, 1)$을 지난다.
$1=\log_3(6-5)+b$, $b=1$
따라서 $a+b=5$

27. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$\frac{1}{4}$, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 16이
공비가 양수 r인 등비수열을 이루므로

$16=\frac{1}{4}r^{n+1}$, $r^{n+1}=64$ $\cdots$ ㉠

주어진 등비수열의 모든 항의 곱이 1024이므로

$\frac{1}{4}\times a_1\times a_2\times\cdots\times a_n\times 16$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}r\times\frac{1}{4}r^2\times\cdots\times\frac{1}{4}r^n\times 16$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\times 16\times r^{1+2+\cdots+n}$

$=2^{-2n-2}\times 2^4\times r^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=2^{-2n+2}\times\left(r^{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}=1024\ \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^{-2n+2}\times\left(2^6\right)^{\frac{n}{2}}=1024$, $2^{n+2}=2^{10}$이므로 $n=8$

따라서 $n=8$을 ㉠에 대입하면 $r^9=64$

28. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

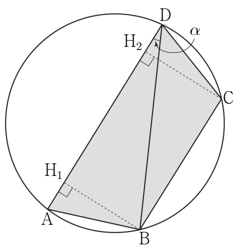
삼각형 ABD에서 $\angle\mathrm{ADB}=\alpha$라 할 때,
삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=12$

$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{CBD}$
선분 AD와 선분 BC는 평행하므로
사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을
각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때,

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=2\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\sin\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{DH_2}}$이므로 사각형 ABCD의 넓이

$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\overline{\mathrm{DH_1}}+\overline{\mathrm{AH_1}}\right)+\left(\overline{\mathrm{DH_1}}-\overline{\mathrm{DH_2}}\right)\right\}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\overline{\mathrm{DH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=2\sqrt{26}\times 2\sqrt{6}=8\sqrt{39}$

따라서 $\frac{S^2}{13}=192$

29. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

$f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하자.
조건 (가)에서

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-x+a\right)f(x)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-x+a-1\right)f(x)}{x-1}=0$

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\left(x^2-x+a-1\right)f(x)=(a-1)f(1)=0$

따라서 $a=1$ 또는 $f(1)=0$

$a\neq 1$이라 하면 $f(1)=0$이어야 하므로
$c=-b-1$, $f(x)=(x-1)(x+b+1)$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-x+a-1\right)(x-1)(x+b+1)}{x-1}$

$=(a-1)(b+2)=0$

이므로 $b=-2$, $f(x)=(x-1)^2$

$g'(x)=(2x-1)(x-1)^2+\left(x^2-x+a\right)(2x-2)$에서
$g'(1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$f(1)\neq 0$이라 하면 $a=1$이고

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)f(x)}{x-1}=f(1)=0$

이므로 모순이다.
따라서 $a=1$이고 $f(1)=0$이며 $b\neq -2$
$f(x)=(x-1)(x+b+1)$에서 $f'(x)=2x+b$
$g(x)=\left(x^2-x+1\right)f(x)$에서
$g'(x)=(2x-1)f(x)+\left(x^2-x+1\right)f'(x)$
조건 (다)에서
$f(\alpha)=f'(\alpha)$이므로
$(\alpha-1)(\alpha+b+1)=2\alpha+b\ \cdots$ ㉠
$g'(\alpha)=(2\alpha-1)f(\alpha)+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$
$(2\alpha-1)f'(\alpha)+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$
$\left(\alpha^2+\alpha-2\right)f'(\alpha)=0$
$(\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b)=0$

따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$일 때

㉠에서 $b=-2$이므로 $b\neq -2$인 것에 모순이다.

$\alpha=-2$이므로 ㉠에서 $b=\frac{7}{4}$

$g(x)=\left(x^2-x+1\right)(x-1)\left(x+\frac{11}{4}\right)$

$g(\alpha+4)=g(2)=3\times 1\times\frac{19}{4}=\frac{57}{4}$

따라서 $p=4$, $q=57$이므로 $p+q=61$

30. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_n+b_n=2+(n-1)(l+m)$이므로
수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 2이고
공차가 정수 $l+m$인 등차수열이다.
$l+m\geq 0$이라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은
첫째항이 2이고 공차가 $l+m$인 등차수열이다.
공차 $l+m$이 정수이므로

$\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=\frac{10\{2\times 2+9(l+m)\}}{2}=31$에서

$l+m=\frac{11}{45}$을 만족시키는
두 정수 l, m은 존재하지 않는다.
$l+m\leq -2$라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은
첫째항과 제2항이 각각 2, $|a_2+b_2|$이고,
제2항부터 공차가 $|l+m|$인 등차수열이다.
공차 $|l+m|$이 정수이므로

$\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=2+\frac{9\left(2|a_2+b_2|+8|l+m|\right)}{2}=31$에서

$|a_2+b_2|+4|l+m|=\frac{29}{9}$를 만족시키는
두 정수 l, m은 존재하지 않는다.
$l+m=-1$이라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은
첫째항, 제2항, 제3항이 각각 2, 1, 0이고,
제3항부터 공차가 1인 등차수열이다.

이때 $\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=2+1+\frac{8\times(2\times 0+7\times 1)}{2}=31$

따라서 $l+m=-1$

$m=-l-1$에서 $b_n=-10+(n-1)(-l-1)$
$|a_3|=|12+2l|$, $|b_3|=|-12-2l|$이므로
두 정수 l, m에 관계없이 $|a_3|=|b_3|$이 성립한다.

(i) $l\geq 0$일 때
$m<0$이고
모든 자연수 k에 대하여 $a_k>0$, $b_k<0$이다.
$|a_k|-|b_k|=a_k+b_k=3-k$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)=\sum_{k=1}^{10}(3-k)=-25$

(ii) $-4\leq l\leq -1$일 때

(a) $l=-1$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)$
$=2+1+0+(-1)+(-2)+(-3)+(-4)$
$+(-5)+(-6)+(-7)$
$=-25$

(b) $l=-2$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)$
$=2+1+0+(-1)+(-2)+(-3)+(-4)$
$+(-1)+2+5$
$=-1$

(c) $l=-3$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)$
$=2+1+0+(-1)+(-2)+3+4+5+6+7$
$=25$

(d) $l=-4$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)$
$=2+1+0+(-1)+2+3+4+5+6+7$
$=29$

(iii) $-11\leq l\leq -5$일 때
$|a_1|-|b_1|=2$,
$|a_2|-|b_2|=(12+l)-(11+l)=1$이고,
$k\geq 3$인 자연수 k에 대하여
$|a_k|-|b_k|$
$=\{-12-(k-1)l\}+\{10+(k-1)(l+1)\}$
$=k-3$

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)=2+1+\sum_{k=3}^{10}(k-3)=31$

(iv) $l\leq -12$일 때
$|a_1|-|b_1|=2$,
$|a_2|-|b_2|=(-12-l)-(-11-l)=-1$이고,
$k\geq 3$인 자연수 k에 대하여
$|a_k|-|b_k|$
$=\{-12-(k-1)l\}-\{-10-(k-1)(l+1)\}$
$=k-3$
이므로

$\sum_{k=1}^{10}\left(|a_k|-|b_k|\right)=2+(-1)+\sum_{k=3}^{10}(k-3)=29$

(i) ~ (iv)에서
구하는 모든 순서쌍 (l, m)은
$(-11, 10)$, $(-10, 9)$, $(-9, 8)$, $\cdots$, $(-5, 4)$
이므로 개수는 7이다.