

● 수학 영역 ●

수학 '가'형 정답

1	③	2	②	3	②	4	⑤	5	①
6	①	7	④	8	③	9	④	10	④
11	⑤	12	③	13	⑤	14	④	15	⑤
16	①	17	①	18	②	19	③	20	②
21	④	22	3	23	300	24	48	25	64
26	5	27	7	28	37	29	525	30	25

해설

1. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(9n-5)}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = 3$$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값을 구한다.

$$\log_3 54 + \log_9 \frac{1}{36} = \log_3 54 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 9 = 2$$

3. [출제의도] 등차수열의 항을 구한다.

$$a_5 \text{는 } a_3 \text{과 } a_7 \text{의 등차중항이므로 } a_5 = \frac{a_3 + a_7}{2} = 32$$

4. [출제의도] 사건의 독립을 이용하여 확률을 구한다.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

$$\text{따라서 } P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{10}$$

5. [출제의도] 이항정리를 이용하여 계수를 구한다.

$(2x + \frac{a}{x})^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{7C_r} (2x)^{7-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_{7C_r} 2^{7-r} a^r x^{7-2r} \quad (0 \leq r \leq 7)$$

$7-2r=3$ 에서  $r=2$ 이므로  $x^3$ 의 계수는

$${}_{7C_2} \times 2^5 \times a^2 = 21 \times 32 \times a^2 = 42$$

$$\text{따라서 } a^2 = \frac{1}{16} \text{ 이고 } a > 0 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{4}$$

6. [출제의도] 매개변수로 나타낸 함수를 미분한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{t\sqrt{t}}} = \frac{2}{\sqrt{t}}$$

$$\text{따라서 } t=4 \text{ 일 때 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}$$

7. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

주머니 A에서 공을 꺼내는 사건을 X, 주머니에서 흰 공을 꺼내는 사건을 Y라 하자.

$$P(X) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } P(X \cap Y) = \frac{1}{2} \times \frac{21}{50} = \frac{21}{100}$$

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \times \frac{14}{50} = \frac{35}{100}$$

$$\text{구하는 확률은 } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$$

8. [출제의도] 로그가 포함된 부등식의 해를 구한다.

$$\log_2(x^2-7x) - \log_2(x+5) \leq 1 \text{의 진수조건에서 } -5 < x < 0 \text{ 또는 } x > 7 \dots \text{㉠}$$

$$\log_2(x^2-7x) \leq \log_2 2(x+5) \text{ 이므로}$$

$$x^2-7x \leq 2x+10, x^2-9x-10 \leq 0$$

$$(x-10)(x+1) \leq 0, -1 \leq x \leq 10 \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서  $-1 \leq x < 0$  또는  $7 < x \leq 10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

-1, 8, 9, 10이므로 그 합은 26이다.

9. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해한다.

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = k \text{라 하면 } f(k) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{e^k+2} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } e^k = 2, \text{ 즉 } k = \ln 2$$

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+2)^2} \text{ 이므로 } f'(\ln 2) = -\frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = -8$$

10. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

나열하는 카드에 적힌 문자의 종류에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) B와 C인 경우

C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 2장을

일렬로 나열하는 경우의 수는  $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 이다.

(ii) A와 B와 C인 경우

C가 적힌 카드가 2장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 1장과 B가 적힌 카드 2장 및 A가 적힌 카드

1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는  $\frac{4!}{2!} = 12$ 이다.

C가 적힌 카드가 3장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 1장 및 A가 적힌 카드

1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는  $\frac{4!}{2!} = 12$ 이다.

따라서 이 경우의 수는  $12+12=24$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는  $6+24=30$ 이다.

11. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

$$\sin x = \sqrt{3}(1+\cos x), \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ 이므로}$$

$$1 - \cos^2 x = 3(1+\cos x)^2,$$

$$2(1+\cos x)(2\cos x+1) = 0$$

(i)  $\cos x = -1$ 일 때,  $\sin x = 0$ 이고  $x = \pi$

(ii)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때,  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고  $x = \frac{2}{3}\pi$

(i), (ii)에서 방정식의 모든 해의 합은  $\frac{5}{3}\pi$ 이다.

12. [출제의도] 적분과 미분의 관계와 합성함수의 미분을 이용하여 함수값을 구한다.

$$\text{주어진 식에서 } t=1 \text{ 이면 } a^2 - a = a(a-1) = 0$$

이때  $a \neq 0$ 이므로  $a=1$

주어진 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f(\ln t) \times \frac{1}{t} = 2(t \ln t + 1)(\ln t + 1)$$

$$f(\ln t) = 2t(t \ln t + 1)(\ln t + 1), \ln t = 1 \text{ 이면 } t = e$$

$$\text{따라서 } f(1) = 2e(e+1) \times 2 = 4e^2 + 4e$$

13. [출제의도] 정규분포의 성질을 이해한다.

확률밀도함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

(i)  $f(8) > f(14)$ 에서  $m < \frac{8+14}{2}$ , 즉  $m < 11$

(ii)  $f(2) < f(16)$ 에서  $m > \frac{2+16}{2}$ , 즉  $m > 9$

(i), (ii)에서 m은 자연수이므로  $m=10$

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-10}{4}\right) = P(Z \leq -1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.1587$$

14. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(-\sin x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( [x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\pi - [\sin x]_0^\pi \right) = \frac{1}{\pi} \times (-\pi) = -1$$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를  $P(t, a^t)$  ( $t < 0$ )이라 하면 점 P를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는  $(a^t, t)$ 이다.

$\angle PQR = 45^\circ$ 이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는  $(a^t, -t)$ 이다.

직선 PR의 기울기는  $\frac{1}{7}$ 이므로  $\frac{a^t+t}{t-a^t} = \frac{1}{7}$ 에서

$$a^t = -\frac{3}{4}t \dots \text{㉠}$$

$$\overline{PR} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 } \sqrt{(t-a^t)^2 + (a^t+t)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$a^{2t} + t^2 = \frac{25}{4} \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서  $t^2 = 4$ 이고  $t < 0$ 이므로  $t = -2$

㉠에 대입하면  $\frac{1}{a^2} = \frac{3}{2}$ 이고  $a > 0$ 이므로  $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$

16. [출제의도] 배수의 성질을 이용하여 확률을 구한다.

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는  ${}_{10}C_4 = 210$

1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각  $A_0, A_1, A_2$ 라 하면

$$A_0 = \{3, 6, 9\}, A_1 = \{1, 4, 7, 10\}, A_2 = \{2, 5, 8\}$$

이다. 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니라면 집합 X는 세 집합  $A_0, A_1, A_2$  중 두 집합에서 각각 2개의 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.

(i)  $A_0, A_1$ 인 경우의 수는  ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$

(ii)  $A_0, A_2$ 인 경우의 수는  ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$

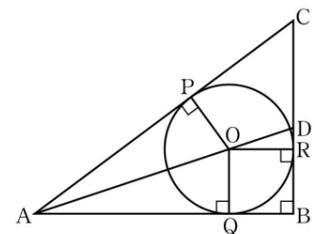
(iii)  $A_1, A_2$ 인 경우의 수는  ${}_4C_2 \times {}_3C_2 = 18$

(i), (ii), (iii)에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$$18+9+18=45$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{45}{210} = \frac{3}{14}$$

17. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$$\overline{OQ} = \overline{OR} = 3 \text{ 이므로 } \overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB} = 1$$

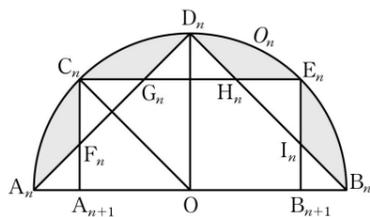
$$\overline{DO} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ 이므로}$$

$$\sin(\angle DOR) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1:3이므로  $\overline{AQ} = 3 \times \overline{OR} = 9$   
 이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로  $\overline{PA} = \overline{AQ} = 9$ ,  $\angle CAD = \angle DAB$   
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ ,  $12 : (9 + \overline{CP}) = 4 : (\overline{CR} - 1)$   
 $9 + \overline{CP} = 3(\overline{CR} - 1)$   
 이때  $\overline{CP} = \overline{CR}$ 이므로  $\overline{CR} = 6$ , 즉  $\overline{CD} = 5$   
 직선 OR와 직선 AB가 평행하므로  $\angle DAB = \angle DOR$ , 즉  $\angle CAD = \angle DOR$   
 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여  $2R = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 5\sqrt{10}$   
 $R = \frac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는  $\frac{125}{2}\pi$ 이다.

18. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 급수의 합을 추론한다.

선분  $A_n B_n$ 의 중점을 O, 선분  $A_n D_n$ 이 두 선분  $C_n A_{n+1}$ ,  $C_n E_n$ 과 만나는 점을 각각  $F_n$ ,  $G_n$ 이라 하고, 선분  $B_n D_n$ 이 두 선분  $C_n E_n$ ,  $E_n B_{n+1}$ 과 만나는 점을 각각  $H_n$ ,  $I_n$ 이라 하자.



반원  $O_n$ 의 반지름의 길이를  $r_n$ 이라 하고,  $n$ 번째 색 칠되는  $\frown$  모양의 도형의 넓이를  $a_n$ 이라 하자.

두 점  $C_n, D_n$ 이 호  $A_n B_n$ 의 4등분점이므로  $\angle C_n O A_{n+1} = 45^\circ$ ,  $\angle A_n O D_n = 90^\circ$ ,  $\overline{D_n A_n} = \overline{D_n B_n}$

$\angle C_n A_{n+1} O = 90^\circ$ 이므로  $\overline{A_{n+1} C_n} = \frac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형  $D_n G_n H_n$ 은  $\overline{D_n G_n} = \overline{D_n H_n}$ 인 직각삼각형이고,

$$\overline{D_n G_n}^2 = 2(\overline{OD_n} - \overline{A_{n+1} C_n})^2 = 2\left(r_n - \frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 r_n^2$$

$\overline{D_n G_n} = (\sqrt{2}-1)r_n$   
 (삼각형  $D_n G_n H_n$ 의 넓이)

$= 2 \times$ (삼각형  $A_n A_{n+1} F_n$ 의 넓이)

두 삼각형  $A_n A_{n+1} F_n$ ,  $B_n B_{n+1} I_n$ 이 합동이므로

$a_n =$ (반원  $O_n$ 의 넓이) - (사각형  $C_n A_{n+1} B_{n+1} E_n$ 의 넓이) -  $2 \times$ (삼각형  $D_n G_n H_n$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \pi r_n^2 - \overline{A_{n+1} B_{n+1}} \times \overline{A_{n+1} C_n} - \overline{D_n G_n}^2 = \frac{1}{2} \pi r_n^2 - \frac{2r_n}{\sqrt{2}} \times \frac{r_n}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)^2 r_n^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 4\right) r_n^2$$

$r_{n+1} = \frac{1}{2} \overline{A_{n+1} B_{n+1}} = \overline{A_{n+1} C_n} = \frac{r_n}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$a_{n+1} = \left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 4\right) r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 4\right) r_n^2$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 2\pi + 8\sqrt{2} - 16$ 이고 공비가  $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2\pi + 8\sqrt{2} - 16}{1 - \frac{1}{2}} = 4\pi + 16\sqrt{2} - 32$$

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.

(i)  $n=1$ 일 때 (좌변)=1, (우변)=1이므로 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=m$ 일 때 (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} m C_k}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

이다.  $n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k-1} (m+1) C_k}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} (m+1) C_k}{k} + \frac{(-1)^m}{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} (m C_k + m C_{k-1})}{k} + \frac{(-1)^m}{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{m+1} \times \frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}$$

이다. 따라서  $n=m+1$ 일 때 (\*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립한다.

$$f(m) = \frac{(-1)^m}{m+1}, g(m) = m!, h(m) = m+1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{g(3)+h(3)}{f(4)} = 50$$

20. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 성질을 추론한다.

$$x \neq -1 \text{ 일 때, } f'(x) = \frac{n - (n^2 - n)x^n}{(x^n + 1)^2}$$

$$\therefore n=3 \text{ 이면 } x < -1 \text{ 일 때, } f'(x) = \frac{3 - 6x^3}{(x^3 + 1)^2} > 0$$

이므로 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다. (참)

ㄴ. 함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이 성립한다.

$n$ 이 홀수일 때,  $x \rightarrow -1$ 이면 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 (분자)  $\rightarrow -n$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는다.

$n$ 이 짝수일 때,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{n}{2}$ 이고

$f(-1) = -2$ 이므로  $n=4$ 이다. 따라서  $n=4$ 일 때만 함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서

연속이므로  $f'(x) = \frac{4 - 12x^4}{(x^4 + 1)^2}$ 이다.

$x < 0$ 일 때  $f(x) < 0$ 이고,  $x \geq 0$ 일 때 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소는 다음과 같다.

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	...
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{27}$	$\searrow$

$2 < \sqrt[3]{27}$ 이므로 방정식  $f(x)=2$ 는  $x \geq 0$ 에서 만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ.  $f'(x)=0$ 에서  $x^n = \frac{1}{n-1}$  ( $n \neq 1$ )

(i)  $n$ 이 홀수일 때 함수  $f(x)$ 는 극솟값을 갖지 않는다.

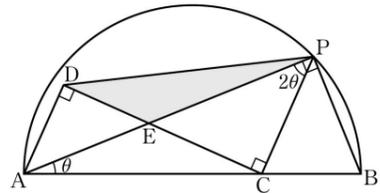
(ii)  $n$ 이 짝수일 때  $n=2$ 이면 함수  $f(x)$ 는 극솟값을 갖지 않고,

$n \geq 4$ 이면 함수  $f(x)$ 는  $x = -\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 구간  $(-1, \infty)$ 에서 함수  $f(x)$ 가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수  $n$ 은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로  $\overline{EP} : \overline{EA} = \overline{EC} : \overline{ED}$ 에서  $\overline{EP} \times \overline{ED} = \overline{EA} \times \overline{EC}$

$\angle DEP = \frac{\pi}{2} + 2\theta$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{EP} \times \overline{ED} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \frac{1}{2} \times \overline{EA} \times \overline{EC} \times \cos 2\theta$$

직각삼각형 APB에서  $\overline{AP} = 2\cos\theta$   
 삼각형 ACP에서  $\angle ACP = \pi - 3\theta$ 이므로

사인법칙에 의하여  $\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{AP}}{\sin(\pi - 3\theta)}$ 에서

$$\overline{AC} = \frac{2\sin 2\theta \cos \theta}{\sin 3\theta}$$

삼각형 ACE에서  $\angle ACE = \frac{\pi}{2} - 3\theta$ ,

$\angle CEA = \frac{\pi}{2} + 2\theta$ 이고 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{EC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{EA}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)} = \frac{\overline{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} \text{ 이므로}$$

$$\overline{EC} = \frac{\overline{AC} \sin \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} = \frac{2\sin 2\theta \sin \theta \cos \theta}{\sin 3\theta \cos 2\theta}$$

$$\overline{EA} = \frac{\overline{AC} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} = \frac{2\sin 2\theta \cos \theta \cos 3\theta}{\sin 3\theta \cos 2\theta}$$

$$S(\theta) = \frac{2\sin^2 2\theta \sin \theta \cos^2 \theta \cos 3\theta}{\sin^2 3\theta \cos 2\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\sin^2 2\theta \sin \theta \cos^2 \theta \cos 3\theta}{\theta \sin^2 3\theta \cos 2\theta} = \frac{8}{9} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \left(\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2 \left(\frac{\cos^2 \theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta}\right) = \frac{8}{9}$$

22. [출제의도] 합성함수의 도함수를 계산한다.

$f'(x) = 3\cos(3x-6)$ 이므로  $f'(2) = 3\cos 0 = 3$

23. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 이해한다.

$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n = 200$ 에서  $n = 900$

따라서  $E(X) = 900 \times \frac{1}{3} = 300$

24. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \tan(\pi - \theta) = \cos \theta \times (-\tan \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \text{ 이므로 } 30(1 - \sin \theta) = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

25. [출제의도] 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구한다.

모표준편차가 1이고 표본의 크기가  $n$ 일 때, 표본평균을  $\bar{x}$ 라 하면 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의

$$\text{신뢰구간은 } \bar{x} - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$100(b-a) = 100 \times 2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = 49 \text{에서 } n = 64$$

26. [출제의도] 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$$A_n(n, 0), B_n(n, 3) \text{에서 } \overline{OA_n} = n, \overline{OB_n} = \sqrt{n^2 + 9}$$

직선  $OB_n$ 의 방정식은  $y = \frac{3}{n}x$  이므로

$$\text{점 } C_n \text{의 좌표는 } \left(1, \frac{3}{n}\right) \text{이고 } \overline{PC_n} = \frac{3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{PC_n}}{\overline{OB_n} - \overline{OA_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{n^2 + 9} - n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \sqrt{1 + \frac{9}{n^2}} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$p = 3, q = 2 \text{이므로 } p + q = 5$$

27. [출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

$$A = B \text{이므로 } \int_0^2 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^2 (2x+3)f'(x) dx$$

$$= \left[ (2x+3)f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 2f(x) dx$$

$$= 7f(2) - 3f(0) - 0 = 7$$

28. [출제의도] 중복조합을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A가 반드시 빵을 1개 이상 받는 경우의 수는 A에게 빵 1개와 우유 1개를 먼저 주고, 남은 빵 2개와 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(i) A에게 남은 빵 2개를 주는 경우  
남은 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는  ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 이다.

(ii) A에게 남은 빵 2개 중 1개를 주는 경우  
남은 빵 1개를 B 또는 C에게 나누어 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가  ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 이므로 경우의 수는  $2 \times 6 = 12$ 이다.

(iii) A에게 남은 빵을 주지 않는 경우  
남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가  ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 이므로 경우의 수는  $2 \times 6 = 12$ 이다.

또 남은 빵 2개를 학생 B와 C에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개씩 주고 남은 우유 1개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는  $1 \times 3 = 3$ 이다.

따라서 A에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는  $12 + 3 = 15$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는  $10 + 12 + 15 = 37$ 이다.

29. [출제의도] 수열의 합을 추론한다.

자연수  $a, b, c$ 에 대하여  $a < b$ 이고 조건 (나)에서  $a + b > c$ 이므로  $c \geq 4$ 이다.

(i)  $c = 2k$  ( $k = 2, 3, 4, \dots, 10$ )인 경우

$$b = 2k - 1 \text{일 때 } 2 \leq a \leq 2k - 2$$

$$b = 2k - 2 \text{일 때 } 3 \leq a \leq 2k - 3$$

⋮

$$b = k + 1 \text{일 때 } a = k$$

이므로 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$$(2k-3) + (2k-5) + (2k-7) + \dots + 3 + 1$$

$$= \frac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2} = (k-1)^2$$

(ii)  $c = 2k + 1$  ( $k = 2, 3, 4, \dots, 9$ )인 경우

$$b = 2k \text{일 때 } 2 \leq a \leq 2k - 1$$

$$b = 2k - 1 \text{일 때 } 3 \leq a \leq 2k - 2$$

⋮

$$b = k + 2 \text{일 때 } k \leq a \leq k + 1$$

이므로 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$$(2k-2) + (2k-4) + (2k-6) + \dots + 4 + 2$$

$$= \frac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2} = k(k-1)$$

(i), (ii)에서 모든 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$$\sum_{k=2}^{10} (k-1)^2 + \sum_{k=2}^9 k(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 (k^2 - k) = \sum_{k=1}^9 (2k^2 - k)$$

$$= 2 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - \frac{9 \times 10}{2} = 525$$

30. [출제의도] 치환적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x) = kx^2 + px + q$  ( $p, q$ 는 상수)라 하면

$$f(0) = f(-2) \text{이므로 } q = 4k - 2p + q, p = 2k$$

$$f(0) \neq 0 \text{이므로 } q \neq 0$$

따라서  $f(x) = kx^2 + 2kx + q$  ( $k > 0, q \neq 0$ )

$$\text{조건 (가)에서 } (x+1)\{g(x) - mx - m\} \leq 0$$

$$x \geq -1 \text{일 때, } g(x) \leq mx + m$$

$$x < -1 \text{일 때, } g(x) \geq mx + m$$

이고,  $g(x)$ 는 연속함수이므로  $g(-1) = 0$

$$(-a+b)e^{f(-1)} = 0 \text{에서 } b = a$$

$$g(x) = (ax+a)e^{kx^2+2kx+q} \text{에서}$$

$$g'(x) = a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$$g''(x) = 2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$a < 0, k > 0$ 이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$g'(x) < 0 \text{이고, } x < -1 \text{이면 } g''(x) > 0, x > -1 \text{이면}$$

$$g''(x) < 0 \text{이다. 조건 (가)에서 } m \text{의 최솟값이 } -2 \text{이므로 } g'(-1) = -2$$

$$ae^{-k+q} = -2 \dots \dots \text{㉠}$$

$$\text{조건 (나)의 } \int_0^1 g(x) dx = \frac{e-e^4}{k} \text{에서}$$

$$kx^2 + 2kx + q = t \text{라 하면}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_q^{3k+q} \frac{a}{2k} e^t dt$$

$$= \left[ \frac{a}{2k} e^t \right]_q^{3k+q} = \frac{a}{2k} (e^{3k+q} - e^q)$$

㉠을 대입하면

$$\frac{-2e^k}{2k} (e^{3k} - 1) = \frac{e - e^4}{k}, -e^{4k} + e^k = e - e^4$$

$$e^{4k} - e^4 - e^k + e = 0$$

$$(e^k - e)\{(e^{2k} + e^2)(e^k + e) - 1\} = 0$$

$$(e^{2k} + e^2)(e^k + e) - 1 > 0 \text{이므로}$$

$$e^k - e = 0, \text{ 즉 } k = 1$$

조건 (나)에서

$$\int_{-2f(0)}^1 g(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_{-2f(0)}^0 g(x) dx = 0$$

$$k = 1 \text{이므로 } x^2 + 2x + q = t \text{라 하면}$$

$$\int_{-2f(0)}^0 g(x) dx = \int_{4q^2-3q}^q \frac{a}{2} e^t dt$$

$$= \left[ \frac{a}{2} e^t \right]_{4q^2-3q}^q = \frac{a}{2} (e^q - e^{4q^2-3q}) = 0$$

$a \neq 0$ 에서  $q = 4q^2 - 3q$ 이고  $q \neq 0$ 이므로  $q = 1$

$$\text{㉠에 대입하면 } ae^{-1+1} = -2, a = -2$$

따라서  $a = -2, b = -2, f(x) = x^2 + 2x + 1$ 이므로

$$f(ab) = f(4) = 16 + 8 + 1 = 25$$

수학 '나'형 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

해설

1. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.

$$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

2. [출제의도] 중복순열과 중복조합의 값을 계산한다.

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12, {}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10 \text{이므로}$$

$${}_4P_2 + {}_4H_2 = 12 + 10 = 22$$

3. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{15}{2} \times 5 = \frac{75}{2}$$

4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{이므로 } f'(2) = 3$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{-h}$$

$$= f'(2) + f'(2)$$

$$= 2f'(2)$$

$$= 6$$

5. [출제의도] 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_2 + 2d, a_5 = a_3 + 2d \text{이므로}$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + 6d$$

$$\text{즉, } 6d = (a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3) = 39 - 15 = 24$$

따라서  $d = 4$

6. [출제의도] 이항정리를 이용하여 식의 값을 구한다.

$${}_4C_0 + {}_4C_1 \times 3 + {}_4C_2 \times 3^2 + {}_4C_3 \times 3^3 + {}_4C_4 \times 3^4$$

$$= (1+3)^4 = 4^4 = 256$$

7. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의  $y$ 좌표가

$$\text{같으므로 } \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{이므로 } 2\sin x = 1$$

$$\text{즉, } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6}$$

따라서 모든 점의  $x$ 좌표의 합은  $\pi$

8. [출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \text{에서}$$