2021학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열 I)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

동전 5개가 앞면이 2개, 뒷면이 3개가 보이도록 놓여있다. 이 동전 5개 중에서 임의로 하나를 선택하여 뒤집는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 보이는 동전이 모두 같은 면이 되면 멈춘다. 멈출 때까지의 총 시행 횟수를 확률변수 X라 하고, X가 4 이하인 사건을 A라 하자. 첫 시행에서 앞면이 보이는 동전을 선택하는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(B|A)$를 구하여라.

[예시답안]

5개의 동전 중 임의로 하나를 선택하여 뒤집는 시행에서, 앞면이 보이는 동전을 선택하는 사건을 H, 뒷면이 보이는 동전을 선택하는 사건을 T로 나타내자. 이 시행을 반복하여 동전이 모두 같은 면이 되면 멈추기로 할 때, 매 시행에서 어떤 동전이 선택되었는지를 연속된 H와 T로 나타내기로 하자. 사건 A는 다음과 같다.

$$A = \{\mathrm{HH}, \mathrm{TTT}, \mathrm{HTHH}, \mathrm{THHH}\}$$

사건 A를 구성하는 각 사건들의 확률은 아래와 같다.

$$\mathrm{P}(X=2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

$$\mathrm{P}(X=3) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$

$$\mathrm{P}(X=4) = \frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{34}{625}$$

확률의 덧셈정리에 의해,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=3) + \mathrm{P}(X=4) = \frac{114}{625}$$

이다. 사건 B는 첫 시행에서 앞면이 보이는 동전을 선택하는 사건이므로,

$$A \cap B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HTHH}\}$$

이며, 이 사건이 발생할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{66}{625}$$

이다. 따라서

$$P(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{11}{19}$$

이다.

[문제 2] (95점)

다음을 모두 만족시키는 다항식 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f(0)=0$

(2) 상수 $0<a<1$에 대하여 $\displaystyle\int_{1-a}^{1+a}\frac{\cos a-\cos 1\cos x}{\sin^2 x}\,dx=2\sin f(a)$이다.

[예시답안]

$$\begin{aligned}
&\int_{1-a}^{1+a}\frac{\cos a-\cos 1\cos x}{\sin^2 x}\,dx\\
&=\cos a\int_{1-a}^{1+a}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx-\cos 1\int_{1-a}^{1+a}\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx\\
&=\cos a\left[-\cot x\right]_{1-a}^{1+a}-\cos 1\left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{1-a}^{1+a}\\
&=-\cos a\{\cot(1+a)-\cot(1-a)\}-\cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)}-\frac{1}{\sin(1+a)}\right\}
\end{aligned}$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 계산하면

$$\begin{aligned}
&-\cos a\{\cot(1+a)-\cot(1-a)\}-\cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)}-\frac{1}{\sin(1+a)}\right\}\\
&=-\cos a\left\{\frac{\cos(1+a)}{\sin(1+a)}-\frac{\cos(1-a)}{\sin(1-a)}\right\}-\cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)}-\frac{1}{\sin(1+a)}\right\}\\
&=\frac{\cos 1-\cos a\cos(1+a)}{\sin(1+a)}-\frac{\cos 1-\cos a\cos(1-a)}{\sin(1-a)}\\
&=\frac{\cos 1-\cos a(\cos 1\cos a-\sin 1\sin a)}{\sin(1+a)}\\
&\quad-\frac{\cos 1-\cos a(\cos 1\cos a+\sin 1\sin a)}{\sin(1-a)}\\
&=\frac{\cos 1(1-\cos^2 a)+\cos a\sin 1\sin a}{\sin(1+a)}-\frac{\cos 1(1-\cos^2 a)-\cos a\sin 1\sin a}{\sin(1-a)}\\
&=\frac{\cos 1\sin^2 a+\cos a\sin 1\sin a}{\sin(1+a)}-\frac{\cos 1\sin^2 a-\cos a\sin 1\sin a}{\sin(1-a)}\\
&=\frac{\sin a(\cos 1\sin a+\cos a\sin 1)}{\cos 1\sin a+\cos a\sin 1}-\frac{\sin a(\cos 1\sin a-\cos a\sin 1)}{\sin 1\cos a-\cos 1\sin a}\\
&=2\sin a
\end{aligned}$$

이다. 즉

$$\int_{1-a}^{1+a}\frac{\cos a-\cos 1\cos x}{\sin^2 x}\,dx=2\sin a=2\sin f(a)$$

이고 $f(x)$는 $f(0)=0$인 다항식이므로 $f(x)=x$이다.

[문제 3] (총 105점)

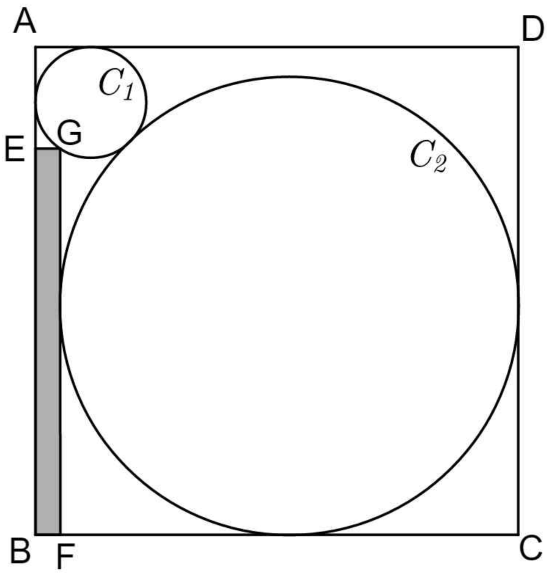
한 변의 길이가 $3+2\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD와 그 내부에 원 C_1, 원 C_2, 직사각형 EBFG가 다음을 모두 만족시키도록 놓여있다.

(1) C_1은 두 변 AB, AD와 각각 한 점에서만 만난다.
(2) C_2는 중심이 C_1 밖에 있고 C_1, 변 BC, 변 CD와 각각 한 점에서만 만난다.
(3) 점 E는 변 AB에 있고, 점 F는 변 BC에 있다.
(4) 직사각형 EBFG는 C_1, C_2와 각각 한 점에서만 만난다.
(5) $\overline{\mathrm{BF}} < \overline{\mathrm{EB}}$

변 BF의 길이를 x라 하고 직사각형 EBFG의 넓이를 $f(x)$라 하자.

(a) 함수 $f(x)$를 구하여라. (65점)

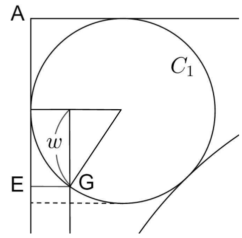
(b) 함수 $f(x)$가 미분가능함을 보여라. (40점)



[예시답안]

$d=3+2\sqrt{2}$라 하자.

(a) C_1과 C_2의 반지름을 각각 y, z라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}y+y+z+\sqrt{2}z=\sqrt{2}d$이므로 $y+z=2+\sqrt{2}$이다. $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $x+2z=d$이고 $z=\dfrac{d-x}{2}$이다. 따라서 $y=2+\sqrt{2}-z=\dfrac{1+x}{2}$이다.



(i) $x<y$일 경우

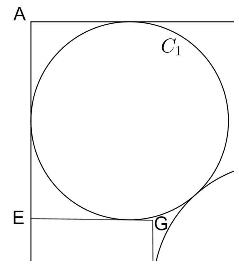
$y=\dfrac{1+x}{2}$이므로 $x<1$이다. C_1의 중심을 지나고 $\overline{\mathrm{AD}}$와 평행한 직선과 점 G사이의 거리를 w라고 하면

$$w=\sqrt{y^2-(y-x)^2}=\sqrt{\left(\frac{1+x}{2}\right)^2-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}=\sqrt{x}$$

이다. $\overline{\mathrm{EB}}=d-y-w=d-\dfrac{1+x}{2}-\sqrt{x}$이므로 $0<x<1$이고 $f(x)=\overline{\mathrm{BF}}\cdot\overline{\mathrm{EB}}=x\left(d-\dfrac{1+x}{2}-\sqrt{x}\right)$이다.

(ii) $x\geq y$일 경우

$y=\dfrac{1+x}{2}$이므로 $x\geq 1$이다. 또한 $\overline{\mathrm{EG}}$가 C_1에 접하므로 $\overline{\mathrm{EB}}=d-2y=d-1-x$이다. 조건 (5)로부터 $x<d-1-x$이므로 $x<1+\sqrt{2}$이다. 따라서 $1\leq x<1+\sqrt{2}$이고 $f(x)=\overline{\mathrm{BF}}\cdot\overline{\mathrm{EB}}=x(d-1-x)$이다.



(i)과 (ii)에 의해

$$f(x)=\begin{cases} x\left(3+2\sqrt{2}-\dfrac{1+x}{2}-\sqrt{x}\right) & (0<x<1)\\ x(2+2\sqrt{2}-x) & (1\leq x<1+\sqrt{2})\end{cases}$$

이다.

(b) $0<x<1$과 $1<x<1+\sqrt{2}$에서 $f(x)$는 미분가능한 함수의 합과 곱으로 정의되었으므로 각 구간에서 미분가능하다. $x=1$에서의 미분가능성을 확인하자.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)\left\{3+2\sqrt{2}-\dfrac{1+(1+h)}{2}-\sqrt{1+h}\right\}-(1+2\sqrt{2})}{h}=2\sqrt{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)\{2+2\sqrt{2}-(1+h)\}-(1+2\sqrt{2})}{h}=2\sqrt{2}$$

이다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고, $f(x)$는 $0<x<1+\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

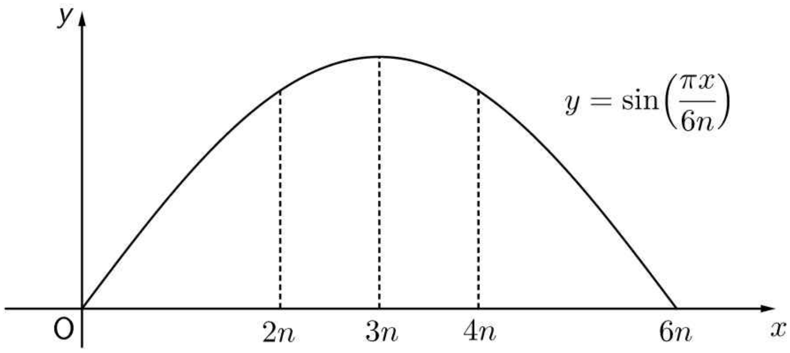
[문제 4] (115점)

자연수 n에 대하여 다음을 모두 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(1) $1 \le a < b < c \le 6n$
(2) $a + c = 2b$
(3) $\sin\left(\frac{\pi a}{6n}\right) < \sin\left(\frac{\pi b}{6n}\right) < \sin\left(\frac{\pi c}{6n}\right)$

[예시답안]

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{6n}\right)$라 하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



a, b, c는 서로 다른 자연수이므로 $2 \le b \le 6n - 1$이다.

(i) $2 \le b \le 2n$일 경우

a는 자연수이므로 조건 (2)에 의해 $c < 4n$이다. 따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프에 의해서 $f(a) < f(b) < f(c)$을 만족시킨다. b에 대하여 a를 1부터 $b-1$까지 선택할 수 있으므로 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $b-1$이다.

(ii) $2n < b < 3n$일 경우

$y = f(x)$는 $x = 3n$에 대해서 대칭이므로 $f(b) < f(c)$를 만족시키기 위해서는 $b < c < 6n - b$이어야 한다. 또한 c가 $b < c < 6n - b$인 경우 a는 1과 b 사이에 존재하고 $f(a) < f(b)$이다. b에 대하여 c는 $b+1$부터 $6n - b - 1$까지 선택할 수 있으므로 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6n - 2b - 1$이다.

(iii) $3n \le b \le 6n - 1$일 경우

함수 $y = f(x)$의 그래프로부터 $f(b) > f(c)$이므로 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의해서 주어진 조건을 모두 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$\sum_{b=2}^{2n}(b-1) + \sum_{b=2n+1}^{3n-1}(6n-2b-1) = 3n^2 - 3n + 1$$

이다.