

# 논술고사 문제지 (자연계열 II)

[논술고사 시간 15:00 ~ 17:00]

모집단위	학부·과	수험번호	성명
------	------	------	----

## 【수험생 유의사항】

1. 답안 작성 시 제목은 달지 말 것.
2. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
3. 답안 작성 시 필기구는 흑색 펜, 샤프 또는 연필을 사용할 것. (청색, 적색 펜 등 사용 불가)  
다만, 수험번호와 주민등록번호 앞자리 마킹은 컴퓨터용 사인펜을 사용할 것.
4. 문제지와 답안지의 문제 번호가 일치하는지 반드시 확인할 것. (불일치 시 0점 처리)
5. 각 문항별 답안 작성 구역안의 내용만 평가함.
6. 답안 수정은 지우개를 사용하거나 두 줄로 긋고 새로 작성하여야 함. (수정테이프는 사용할 수 없음)



## [문제 1] (85점)

$f(x) = x^4 + 2ax^3 - 3a^2x^2 + 4a^4 - 4a^3 + 1$  ( $a > 0$ )이다. 곡선  $y = f(x)$ 가 점  $(1, 1)$ 을 지나는 직선과 서로 다른 두 점에  
서 접할 때, 이 직선과 곡선  $y = f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

## [문제 2] (95점)

자연수  $n$  ( $n \geq 9$ )에 대하여  $n$  이하의 자연수 전체의 집합을  $A_n$ 이라 하자. 다음을 모두 만족시키는  
함수  $f: A_n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 의 개수를 구하여라.

- (1) 집합  $\{k \mid f(k) = 0, k \in A_n\}$ 의 원소의 개수는 3이다.
- (2) 집합  $\{k \mid f(k) = 1, k \in A_n\}$ 의 원소의 개수는 3이다.
- (3)  $n$  이하의 모든 자연수  $k$ 에 대하여  $\sum_{i=1}^k f(i) \geq k$ 이다.

**[문제 3] (총 105점)**

다음 물음에 답하여라.

(a) 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여, 곡선  $y=f(x)$ 의 점 P와 이 곡선에 있지 않은 점 Q가 다음을 만족시킬 때, 곡선  $y=f(x)$ 의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직임을 보여라. (55점)

곡선  $y=f(x)$ 의 모든 점 X에 대하여  $\overline{PQ} \leq \overline{XQ}$ 이다.

(b) 곡선  $y=x^2$ 에서 움직이는 점 P와 곡선  $y=-(x-6)^2$ 에서 움직이는 점 Q에 대하여  $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라. (50점)

**[문제 4] (115점)**

함수  $y=f(x)$  ( $x \geq 1$ )가 다음을 만족시킨다.

모든 자연수  $m$ 에 대하여  $64^{m-1} \leq x < 64^m$ 이면  $f(x) = 8^m$ 이다.

자연수  $k$ 에 대하여 함수  $y = \frac{1}{k^3}x^2$ 의 그래프와 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수를  $a_k$ 라 하자.  $n=2^{300}$ 일 때,

$\sum_{k=1}^n a_k$ 를 구하여라.

이 면은 여백입니다.