2021학년도 수시모집 논술전형

# 논술고사 해설지 (자연계열 II)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

$f(x)=x^4+2ax^3-3a^2x^2+4a^4-4a^3+1\ (a>0)$이다. 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,1)$을 지나는 직선과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 이 직선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

[예시답안]

점 $(1,1)$을 지나며 기울기가 $m$인 직선의 방정식은 $y=m(x-1)+1$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=m(x-1)+1$이 서로 다른 두 점에서 접할 때, 이 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$(단, $\alpha<\beta$)라 하면,

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=x^4+2ax^3-3a^2x^2+4a^4-4a^3+1-\{m(x-1)+1\}$$

이다. $x^3$, $x^2$, $x$의 계수와 상수항을 비교하면

$$-2(\alpha+\beta)=2a,\quad \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-3a^2,\quad -2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-m,\quad \alpha^2\beta^2=4a^4-4a^3+m$$

이므로 $m=4a^3$이고 $\alpha=-2a$, $\beta=a$이다. 직선 $y=4a^3(x-1)+1$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2a}^{a}\{(x^4+2ax^3-3a^2x^2+4a^4-4a^3+1)-(4a^3x-4a^3+1)\}dx=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}ax^4-a^2x^3-2a^3x^2+4a^4x\right]_{-2a}^{a}=\frac{81}{10}a^5$$

이다.

[문제 2] (95점)
자연수 $n$ $(n \ge 9)$에 대하여 $n$ 이하의 자연수 전체의 집합을 $A_n$이라 하자. 다음을 모두 만족시키는 함수 $f: A_n \to \{0, 1, 2\}$의 개수를 구하여라.

| |
|---|
| (1) 집합 $\{k \mid f(k) = 0, k \in A_n\}$의 원소의 개수는 3이다. |
| (2) 집합 $\{k \mid f(k) = 1, k \in A_n\}$의 원소의 개수는 3이다. |
| (3) $n$ 이하의 모든 자연수 $k$에 대하여 $\sum_{i=1}^{k} f(i) \ge k$이다. |

[예시답안]
(i) $f(n-2) = f(n-1) = f(n) = 1$일 경우를 생각하자. 그러면 조건 (1)과 (2)를 모두 만족시키지만 조건 (3)을 만족시키지 않는 함수의 개수는 다음과 같다.

- $f(1) = 0$의 경우 함수의 개수는 ${}_{n-4}\mathrm{C}_2$이다.
- $f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(3) = 0$의 경우 함수의 개수는 ${}_{n-6}\mathrm{C}_1$이다.
- $f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(3) = 2,\ f(4) = 0,\ f(5) = 0$의 경우 함수의 개수는 1이다.
- $f(1) = 2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 0,\ f(4) = 0,\ f(5) = 0$의 경우 함수의 개수는 1이다.

따라서 이 경우에 문제의 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수는 조건 (1)과 (2)를 모두 만족시키는 함수의 개수에서 위 네 가지 경우에 해당하는 함수의 개수를 뺀 것과 같다. 즉

$$ {}_{n-3}\mathrm{C}_3 - \left( {}_{n-4}\mathrm{C}_2 + {}_{n-6}\mathrm{C}_1 + 1 + 1 \right) = \frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6} $$

이다.

(ii) 일반적으로 $1 \le a < b < c \le n$인 $a,\ b,\ c$에서 $f(a) = f(b) = f(c) = 1$일 경우는 $a,\ b,\ c$의 선택이 조건 (3)의 부등식의 성립여부에 영향을 주지 않는다. 따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수도 $\frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6}$이다.

따라서 문제의 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수는

$$ {}_{n}\mathrm{C}_3 \times \frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-8)}{36} $$

이다.

[문제 3] (총 105점)

다음 물음에 답하여라.

(a) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$의 점 P와 이 곡선에 있지 않은 점 Q가 다음을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직임을 보여라. (55점)

| |
|---|
| 곡선 $y=f(x)$의 모든 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \le \overline{\mathrm{XQ}}$이다. |

(b) 곡선 $y=x^2$에서 움직이는 점 P와 곡선 $y=-(x-6)^2$에서 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하여라. (50점)

[예시답안]

(a) 곡선 $y=f(x)$의 점 P의 좌표를 $(p, f(p))$라 하고, 점 $\mathrm{Q}(a, b)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$의 모든 점 $\mathrm{X}(x, f(x))$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \le \overline{\mathrm{XQ}}$이다. 함수 $g(x)=\overline{\mathrm{XQ}}^2=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$는 미분가능한 함수이고, 최솟값은 $g(p)=\overline{\mathrm{PQ}}^2$이다. 따라서

$$g'(p)=2(p-a)+2(f(p)-b)f'(p)=0$$

이다.

$p \ne a$이면 $\dfrac{f(p)-b}{p-a} \cdot f'(p)=-1$이고, 곡선 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직이다.

$p=a$이면 직선 PQ는 $y$축과 평행하고, 점 $\mathrm{Q}(a, b)$가 곡선 $y=f(x)$에 있지 않으므로 $f(p) \ne b$이다.

따라서 $f'(p)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선은 $x$축과 평행하므로, 곡선 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직이다.

(b) $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소일 때 곡선 $y=x^2$의 점을 $\mathrm{A}(a, a^2)$, 곡선 $y=-(x-6)^2$의 점을 $\mathrm{B}(b, -(b-6)^2)$이라 하자. 그러면 (a)에 의해 다음을 모두 만족시킨다.

| |
|---|
| ① 곡선 $y=x^2$의 점 A에서의 접선 $l_1$과 곡선 $y=-(x-6)^2$의 점 B에서의 접선 $l_2$가 서로 평행하다.<br>② 두 점 A, B를 지나는 직선은 두 접선 $l_1$, $l_2$와 동시에 수직이다. |

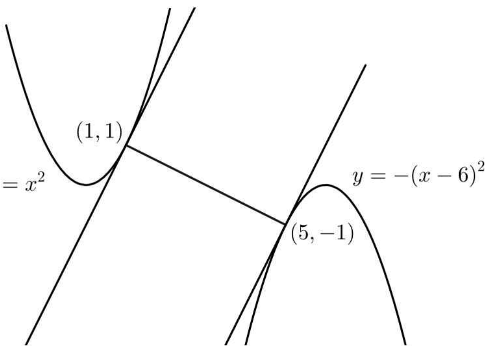
조건 ①로부터 $a=-b+6$이다. $a=b$이면 $a=b=3$이고 조건 ②를 만족시키지 않으므로 $a \ne b$이다. 그러면 조건 ②로부터

$$\frac{a^2+(b-6)^2}{a-b} \cdot 2a=-1, \qquad \frac{a^2+(b-6)^2}{a-b} \cdot \{-2(b-6)\}=-1$$

이다.

$$2a^3+a-3=(a-1)(2a^2+2a+3)=0$$

이므로, $a=1$이고 $b=5$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이므로 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.



[문제 4] (115점)

함수 $y=f(x)$ $(x \ge 1)$가 다음을 만족시킨다.

| |
|---|
| 모든 자연수 $m$에 대하여 $64^{m-1} \le x < 64^m$이면 $f(x)=8^m$이다. |

자연수 $k$에 대하여 함수 $y=\frac{1}{k^3}x^2$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 $a_k$라 하자. $n=2^{300}$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구하여라.

[예시답안]

자연수 $m$에 대하여 $64^{m-1} \le x < 64^m$에서 포물선 $y=\frac{1}{k^3}x^2$와 직선 $y=8^m$의 교점의 개수는 0 혹은 1이다. 교점의 개수가 1일 필요충분조건은 $\frac{64^{2m-2}}{k^3} \le 8^m < \frac{64^{2m}}{k^3}$이다. 즉

$$2^{3m-4} \le k < 2^{3m} \quad (1 \le k \le 2^{300}) \qquad \cdots \text{①}$$

이다. $\sum_{k=1}^{2^{300}} a_k$는 ①을 만족시키는 자연수의 순서쌍 $(k,m)$의 개수와 같다. 따라서 각 $m$에 대하여 $b_m$을 ①을 만족시키는 $k$의 개수라 하면

$$b_m = n(\{k \mid 1 \le k \le 2^{300},\ 2^{3m-4} \le k < 2^{3m}\}) = \begin{cases} 7 & (m=1) \\ 2^{3m}-2^{3m-4} & (2 \le m \le 100) \\ 2^{300}-2^{299}+1 & (m=101) \\ 0 & (m>101) \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{2^{300}} a_k = \sum_{m=1}^{101} b_m = 7 + \sum_{m=2}^{100}(2^{3m}-2^{3m-4}) + 2^{300}-2^{299}+1 = \frac{11 \cdot 2^{300}-4}{7}$$

이다.