2021학년도 수시모집 논술전형

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

포물선 $y=x^2$의 서로 다른 두 점 A와 B에 대하여 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선의 교점을 점 C라 하자. 포물선 $y=x^2$과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이가 60일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

[예시답안]

포물선 $y=x^2$의 점 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$에서의 접선의 방정식은 차례로 $y=2ax-a^2$, $y=2bx-b^2$이고, 두 접선의 교점 C는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$이며 직선 AB의 방정식은 $y=(a+b)x-ab$이다. $b>a$라 하자. 이때 포물선 $y=x^2$과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b \{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx=\left[\frac{a+b}{2}x^2-abx-\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{(b-a)^3}{6}=60$$

이므로 $(b-a)^3=360$이다.

또 직선 AB의 방정식은 $y-(a+b)x+ab=0$이고 점 $\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$와 직선 $y-(a+b)x+ab=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|ab-\dfrac{(a+b)^2}{2}+ab\right|}{\sqrt{1^2+(a+b)^2}}=\frac{(b-a)^2}{2\sqrt{1^2+(a+b)^2}}$$

이며,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=(b-a)\sqrt{1^2+(b+a)^2}$$

이므로

$$\Delta\,\mathrm{ABC}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}\times d}{2}=\frac{(b-a)^3}{4}=\frac{360}{4}=90$$

이다.

[문제 2] (95점)

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_1^2 \frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

[예시답안]

$$\frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2} = \frac{3x^4-4x^3+3x^2+4x+4}{x^2-2x+2}+4x\ln x$$

이고

$$\frac{3x^4-4x^3+3x^2+4x+4}{x^2-2x+2} = 3x^2+2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{4}{x^2-2x+2}$$

이다. 한편,

$$\int_1^2\left(3x^2+2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right)dx = \left[x^3+x^2+x+\ln|x^2-2x+2|\right]_1^2 = 11+\ln 2$$

이고,

$$\int_1^2 \frac{4}{x^2-2x+2}\,dx = 4\int_1^2\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = 4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta = \pi$$

이며,

$$\int_1^2 4x\ln x\,dx = \left[2x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2 2x\,dx = 8\ln 2-3$$

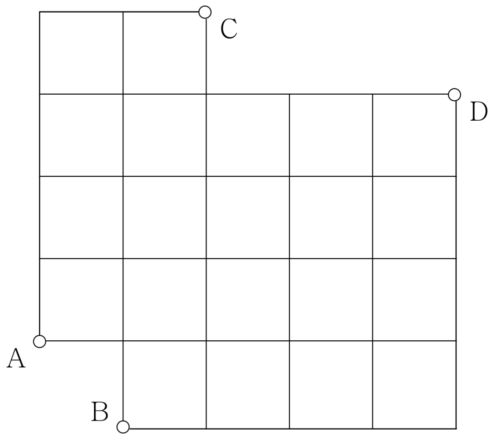
이다. 따라서

$$\int_1^2 \frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2}\,dx = 8+\pi+9\ln 2$$

이다.

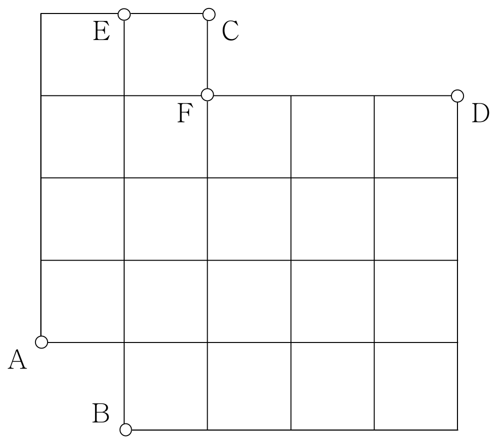
[문제 3] (105점)
아래의 그림과 같은 도로망에서 A 또는 B에서 출발하여 출발점을 포함한 각 교차로에서 다음 규칙을 따라 이동한다.

(1) 동전을 던져 앞면이 나오면 위로(↑), 뒷면이 나오면 오른쪽(→)으로 각각 한 칸 이동한다. (2) 위로 이동할 수 없는 경우에는 오른쪽으로 이동하고, 오른쪽으로 이동할 수 없는 경우에는 위로 이동한다. (3) C 또는 D에 도착하면 이동을 멈춘다.



(a) B에서 출발하였을 때, D에 도착할 확률을 구하여라. (45점)
(b) 시립이는 동전을 던져 앞면이 나오면 A에서 출발하고, 뒷면이 나오면 B에서 출발한다. 시립이가 C에 도착했을 때, 시립이가 A에서 출발하였을 확률을 구하여라. (60점)

[예시답안]
(a) B에서 출발하였을 때, D에 도착할 확률을 p_{BD}라 하고, C에 도착할 확률을 p_{BC}라 하자. 그러면 $p_{BD} = 1 - p_{BC}$이다.



B를 출발하여, C에 도착하기 위해서는 위 그림의 E나 F를 지나야 한다. B → E → C의 경우는 E에 도달한 후, 반드시 C에 도착한다. 이러한 사건이 발생할 확률은 $\frac{1}{2^5}$이다. 또한, B → F → C의 경우는 F에 도달한 후, 동전의

앞면이 나와야 한다. 이러한 사건이 발생할 확률은 $\frac{5}{2^5}\times\frac{1}{2}$이다. 따라서

$$p_{BC}=\frac{1}{2^5}+\frac{5}{2^6}=\frac{7}{64},\qquad p_{BD}=1-p_{BC}=\frac{57}{64}$$

이다.

(b) A를 출발하였을 때, C에 도착할 확률을 p_{AC} 라 하자. A를 출발하였을 때, C에 도착하기 위해서는 위 그림의 E나 F를 지나야 한다. A를 출발하였을 때, E에 도착할 확률은 (a)번 문제와 같은 방법으로 계산하면 $\frac{1}{2^4}+\frac{4}{2^5}$이다. E에 도착한 후에는 반드시 C에 도착하므로, A → E → C의 경우가 발생할 확률은 $\frac{6}{32}$이다. 또한, A → F → C의 경우는 F에 도달한 후, 동전의 앞면이 나와야 한다. A를 출발했을 때, F에 도달할 확률은 ${}_5C_2\frac{1}{2^5}$이므로, A → F → C의 경우가 발생할 확률은 ${}_5C_2\frac{1}{2^6}=\frac{10}{64}$이다. 따라서 $p_{AC}=\frac{6}{32}+\frac{10}{64}=\frac{22}{64}$이다. 또한, 문제 (a)의 풀이에서, $p_{BC}=\frac{7}{64}$이다.

A, B에서 출발했을 확률이 각각 $\frac{1}{2}$이므로 C에 도착했을 확률 p_C는 다음과 같다.

$$p_C=\frac{1}{2}p_{AC}+\frac{1}{2}p_{BC}=\frac{29}{128}$$

C에 도착했을 때, A에서 출발했을 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{p_{AC}}{p_C}$이므로, 구하는 확률은 $\frac{22}{29}$이다.

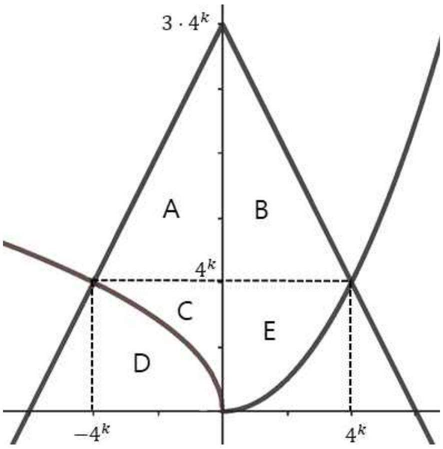
[문제 4] (115점)

좌표평면에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 하자. 자연수 k에 대하여, 아래 함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 둘레와 내부에 있는 격자점의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k$을 구하여라.

$$y = -2|x| + 3 \cdot 4^k, \qquad y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4^k} & (x \geq 0) \\ 2^k\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

[예시답안]

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림에서 A∪B∪C∪E로 이루어진 영역과 같다. 그런데 $y = 2^k\sqrt{-x}$ $(x<0)$ 는 $y = \dfrac{x^2}{4^k}$ $(x>0)$의 역함수 $y = 2^k\sqrt{x}$ $(x>0)$의 y축 대칭이므로, E 내부에 있는 격자점의 개수와 D 내부에 있는 격자점의 개수는 같다.



따라서 영역 A∪B∪C∪D (단, D의 왼쪽 경계와 아래 경계를 제외한 나머지 경계와 점 $(-4^k, 4^k)$를 포함)에 있는 격자점의 개수를 b_k라 하고, 함수 $y = \dfrac{x^2}{4^k}$ $(0 \leq x < 4^k)$의 그래프에 있는 격자점의 개수를 c_k라 하면

$$a_k = b_k + c_k$$

이다. b_k를 점 $(-4^k, 4^k)$와 영역 A∪C∪D (D의 왼쪽 경계와 아래 경계를 제외한 나머지 경계는 포함)와 영역 B (B의 왼쪽 경계를 제외한 나머지 경계 포함)에 있는 점들로 나누어서 생각하면

$$b_k = 1 + \sum_{i=0}^{4^k-1}(3 \cdot 4^k - 2i) + \sum_{i=1}^{4^k}(2 \cdot 4^k - 2i + 1) = 3 \cdot 16^k + 4^k + 1$$

이다. c_k는 $0 \leq x < 4^k$인 정수 중에서 2^k로 나누어떨어지는 정수의 개수와 같다. 즉 c_k는 집합 $\{0 \leq x < 2^k \mid x\text{는 정수}\}$의 원소의 개수이다. 따라서 $c_k = 2^k$이고

$$a_k = 3 \cdot 16^k + 4^k + 2^k + 1$$

이며

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(3 \cdot 16^k + 4^k + 2^k + 1) = \frac{1}{5} \cdot 16^{n+1} + \frac{1}{3} \cdot 4^{n+1} + 2^{n+1} + n - \frac{98}{15}$$

이다.