수학 영역

정답

1	⑤	2	②	3	①	4	②	5	③
6	④	7	②	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	①	13	③	14	⑤	15	①
16	2	17	13	18	16	19	4	20	8
21	180	22	121						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3^{2\sqrt{2}}\times 9^{1-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})}=3^2=9$

2. [출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\dfrac{a_3}{a_2}=2$ 이므로 $a_5=a_3\times r^2=4$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+2$ 이므로 $f'(1)=5$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=2$

5. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}(x-1)=\lim\limits_{x\to 2+}(x^2-ax+3)=f(2)$

$1=7-2a$

따라서 $a=3$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=\dfrac{6}{5}$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$a_2=-2\times\dfrac{1}{2}+1=0$

$a_3=-2\times 0+1=1$

$a_4=-2\times 1+1=-1$

$a_5=-1+1=0$

$\vdots$

이때, $a_{n+3}=a_n$ $(n\ge 2)$ 이므로

$a_{10}=a_7=a_4=-1$

$a_{20}=a_{17}=a_{14}=\cdots=a_2=0$

따라서 $a_{10}+a_{20}=-1+0=-1$

8. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$ 이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$ 에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$ (a는 상수) 라 하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+a)}{x-1}=2+a=3$, $a=1$

$f(x)=(x-1)(2x+1)$

따라서 $f(3)=14$

9. [출제의도] 정적분 이해하기

$\displaystyle\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)

$f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

따라서 $f'(1)=-1$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1 $(0<x_1<1)$, x_2, x_3이라 하면

삼각함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로

$x_2=2-x_1$, $x_3=x_1+4$

$x_1+x_2+x_3=x_1+(2-x_1)+(x_1+4)$

$\quad=x_1+6=\dfrac{25}{4}$

$x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=2-x_1=\dfrac{7}{4}$

따라서 $\overline{AB}=x_2-x_1=\dfrac{3}{2}$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, \log_2 2a)$, $B(b, \log_2 4b)$ $(a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\dfrac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\dfrac{1}{2}$ 에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\dfrac{1}{2}(b-a)$

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}$

$\quad=\sqrt{(b-a)^2+\dfrac{1}{4}(b-a)^2}$

$\quad=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}$

$b-a=4$ $\cdots$ ㉠

$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\dfrac{2b}{a}=2$, $b=2a$ $\cdots$ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

$A(4, 3)$, $B(8, 5)$, $C(4, 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$

12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

$n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$

이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\ge 2)$이다.

$S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$ 이므로

$3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\ge 1)$

이다.

$3a_n=3(S_n-S_{n-1})$

$\quad=(n+2)\times a_n-(\boxed{n+1})\times a_{n-1}$ $(n\ge 2)$

$(n-1)\times a_n=(n+1)\times a_{n-1}$ 이고 $a_1\ne 0$ 이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ne 0$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{\dfrac{n+1}{n-1}}$ $(n\ge 2)$

따라서

$a_{10}=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_9}{a_8}\times\dfrac{a_{10}}{a_9}$

$\quad=2\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{10}{8}\times\dfrac{11}{9}=\boxed{110}$

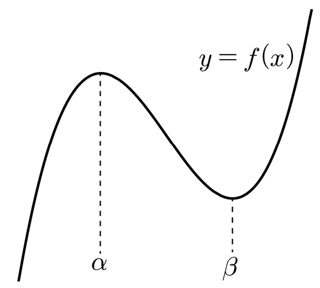
$f(n)=n+1$, $g(n)=\dfrac{n+1}{n-1}$, $p=110$

따라서 $\dfrac{f(p)}{g(p)}=\dfrac{111}{\frac{111}{109}}=109$

13. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(i) $\alpha<\beta\le -2$인 경우

$x\ge -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

$f(-2)<g(-2)<g(2)$

$g(2)\ne f(-2)$ 이므로 모순

(ii) $\alpha<-2<\beta$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty, \alpha)$에서 존재하므로 모순

(iii) $\alpha=-2$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

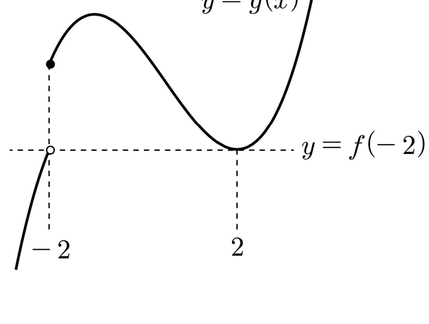
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+\dfrac{1}{2}$

$g(2)\ne f(-2)$ 이므로 모순

(iv) $-2<\alpha<\beta$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$ 이므로 $f(2)+8=f(-2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$ (a, b는 상수) 라 하자.

$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

$b=-6$, $f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0$, $a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

14. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{CBA})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle \mathrm{CBA})=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle \mathrm{CBA}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle \mathrm{ADC}=\pi-\theta$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AD}}=k\ (k>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times 7\times\cos(\pi-\theta)$

$=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x\ (x>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$ 이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수) 라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

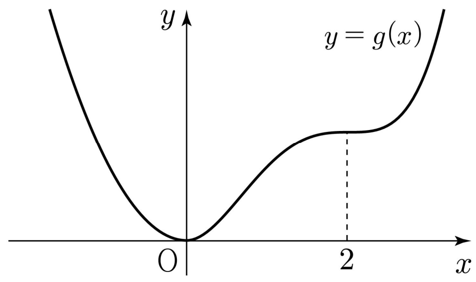
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\ne\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\ne\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma\ (\gamma<0)$, 2라 하면

$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\ne\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$ 이므로

$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$ 이므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

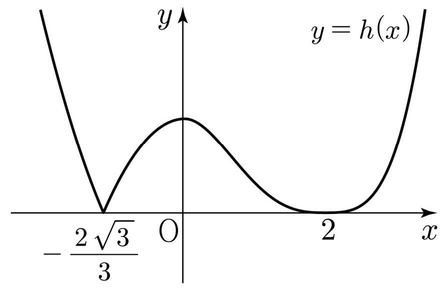
$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$ 이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은 $2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산하기

$\log_3 7\times\log_7 9=\log_3 7\times\frac{\log_3 9}{\log_3 7}$

$=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(6x^2-2x-1)dx$

$=2x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=2-1-1+C=3$, $C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

따라서 $f(2)=16-4-2+3=13$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(3t^2+6t-a)dt$

$=\left[t^3+3t^2-at\right]_0^3=54-3a=6$

따라서 $a=16$

19. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n=3$일 때 $f(3)=1$

$n=4$일 때 $2n^2-9n<0$ 이므로 $f(4)=0$

$n=5$일 때 $f(5)=1$

$n=6$일 때 $2n^2-9n>0$ 이므로 $f(6)=2$

따라서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

정답 및 해설

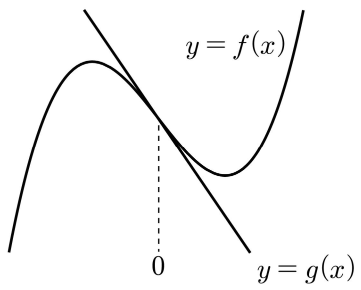
(ⅰ) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a는 상수)라 하면
$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는
$x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순
(ⅱ) $h(x)=ax(x-3)^2$ (a는 상수)라 하면
$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
$h'(x)=f(x)$
$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$
$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$
$f(x)=3(x-1)(x-3)$
따라서
$$\int_0^3 |f(x)|dx$$
$$=3\int_0^3 |(x-1)(x-3)|dx$$
$$=3\int_0^1 (x-1)(x-3)dx-3\int_1^3 (x-1)(x-3)dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$
$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

21. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제 해결하기

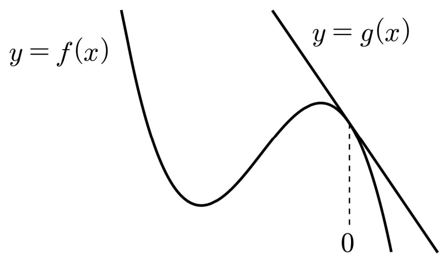
조건 (가)에 의하여
$$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k$$
$$=17n-17(n-1)=17 \quad (n\ge 2)$$
조건 (나)에 의하여
$$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3 \quad (n\ge 1)$$
(ⅰ) $n=2$인 경우
$|a_4-a_3|=5$이고 $a_3+a_4=17$
$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$
조건 (나)에 의하여
$|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$이므로
$a_3=6$, $a_4=11$
(ⅱ) $n=3$인 경우
$|a_6-a_5|=9$이고 $a_5+a_6=17$
$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$
조건 (나)에 의하여
$|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$이므로
$a_5=4$, $a_6=13$
(ⅰ), (ⅱ)와 같은 방법을 반복하면
$a_8=15$, $a_{10}=17$, $\cdots$, $a_{20}=27$이므로
$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{10\times(18+9\times 2)}{2}=180$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

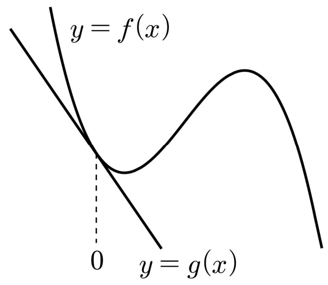
$f(0)=0$이므로
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(0)=c$, $g(x)=cx$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의
접선의 기울기 c에 대하여
(ⅰ) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와
$y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.



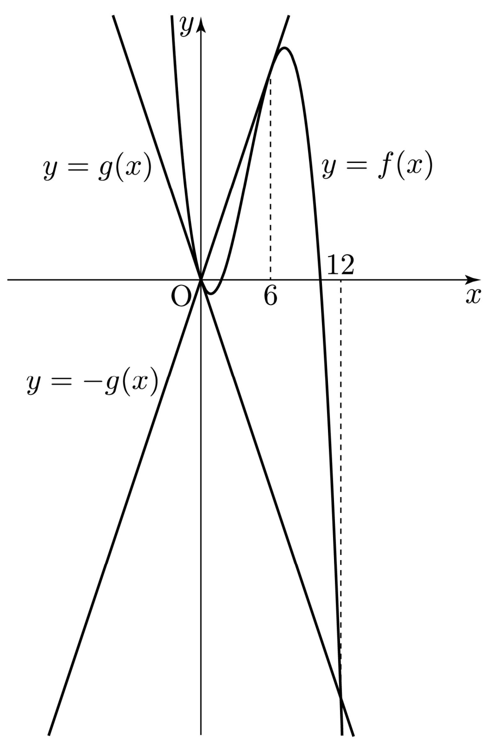
(ⅳ) $c<0$, $a<0$이면
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가
다음과 같은 경우에는 조건 (가)를
만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의
그래프가 다음과 같은 경우에만
조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ $\cdots$ ㉠
조건 (나)에 의하여
$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ $\cdots$ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$
$6-k=0$, $k=6$
$g(x)=18ax$
$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$
$=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을
α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$
함수 $h(x)$는 다음과 같다.
$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha\le x<\beta) \\ -ax^2(x-12) & (0\le x<\alpha \text{ 또는 } x\ge\beta) \end{cases}$$
$\alpha<3<\beta$이므로
$$h(3)=a\times 3\times(3-6)^2=27a=-\frac{9}{2}$$
$a=-\frac{1}{6}$, $c=-3$
$$h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha\le x<\beta) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (0\le x<\alpha \text{ 또는 } x\ge\beta) \end{cases}$$
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$이므로
$\alpha<6<\beta<11$
$h(6)=0$, $h(11)=\frac{1}{6}\times 11^2\times(-1)=-\frac{121}{6}$
따라서
$$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\frac{121}{6}\right)\right\}=121$$

[참고]
함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.