정답 및 해설

기하 정답

23	①	24	④	25	⑤	26	④	27	②
28	③	29	15	30	50				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 평행 계산하기

0 이 아닌 실수 k 에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$ 이므로

$(2m-1,\ 3m+1)=(3k,\ 12k)$

$2m-1=3k$ ⋯ ㉠

$3m+1=12k$ ⋯ ㉡

따라서 두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $m=1$

24. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$ 에서의

접선의 방정식은 $6y=2(x+9)$

준선의 방정식이 $x=-1$ 이므로 $a=-1$

점 $(-1,\ b)$ 가 접선 위의 점이므로 $b=\dfrac{8}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{5}{3}$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 원의 방정식 이해하기

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ 라 하자.

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y)$

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,\ y-6)$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$ 에서

$(x+2,\ y)\cdot(x-6,\ y-6)=0$

$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$

$x^2-4x-12+y^2-6y=0$

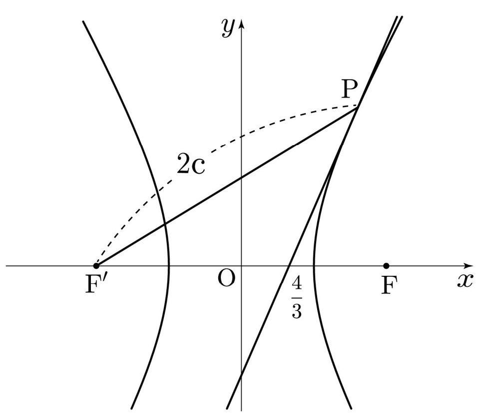
$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

점 P 가 나타내는 도형은 중심이 $(2,\ 3)$ 이고

반지름의 길이가 5 인 원이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 10π

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기



점 P 의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하면

점 P 에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{4}-\dfrac{y_1y}{k}=1$

이 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $\dfrac{4}{x_1}$

$\dfrac{4}{x_1}=\dfrac{4}{3}$ 이므로 $x_1=3$

$\overline{PF'}=\overline{FF'}$ 이므로 $\sqrt{(3+c)^2+y_1^2}=2c$

$y_1^2=3c^2-6c-9$ ⋯ ㉠

점 $P(3,\ y_1)$ 이 쌍곡선 위의 점이고

$k=c^2-4$ 이므로 $\dfrac{9}{4}-\dfrac{y_1^2}{c^2-4}=1$

$y_1^2=\dfrac{5}{4}(c^2-4)$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

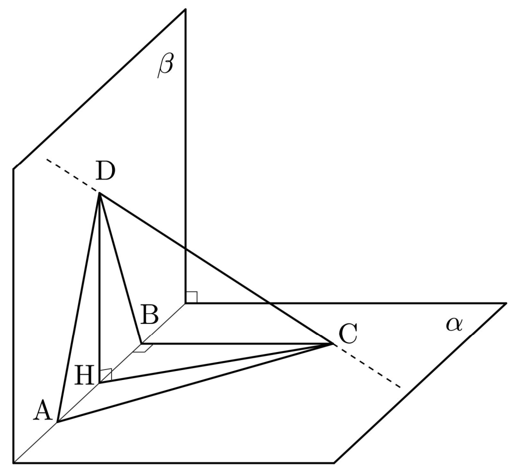
$3c^2-6c-9=\dfrac{5}{4}(c^2-4)$

$7c^2-24c-16=0,\ (7c+4)(c-4)=0$

$c>0$ 이므로 $c=4$

따라서 $k=12$

27. [출제의도] 직선과 평면이 이루는 각 이해하기



삼각형 ABC 가 직각삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-6^2}=4\sqrt{5}$

점 D 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을

H 라 하면

삼각형 DAB 가 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{5}$, $\overline{DH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$

삼각형 HBC 가 직각삼각형이므로

$\overline{CH}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$

두 평면 α , β 는 서로 수직이므로 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$

$\overline{DH}\perp\overline{AB}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$ 이므로

직선 DH 는 평면 α 와 수직이다.

그러므로 $\angle DHC=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{14})^2}=6\sqrt{2}$

점 D 의 평면 α 위로의 정사영이 점 H 이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 추론하기

$\overline{AF}=\dfrac{9}{2}$, $\overline{AF'}=\dfrac{15}{2}$ 이므로

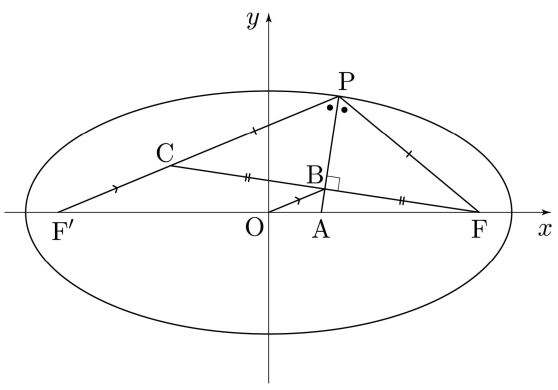
각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF}:\overline{PF'}=3:5$

$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=5k\ (k>0)$ 이라 하자.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8k=2a$

그러므로 $a=4k$



직선 BF 와 선분 PF′ 이 만나는 점을 C 라 하면

각 CPF 의 이등분선이 선분 CF 와 수직으로

만나므로 삼각형 PCF 는 이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{BC}=\overline{BF}$

두 삼각형 FBO 와 FCF′ 에서

$\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$

두 삼각형 FBO , FCF′ 은 서로 닮음이므로

$\overline{OB}:\overline{F'C}=1:2$

$\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$

$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}$

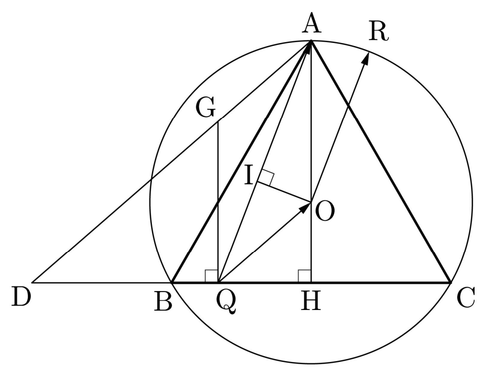
$k=\sqrt{3}$, $a=4\sqrt{3}$

$c^2=a^2-b^2$ 이므로 $36=48-b^2$

$b^2=12$, $b=2\sqrt{3}$

따라서 $a\times b=24$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{3-1}$ 이므로 점 D 는

선분 CB 를 $3:1$ 로 외분하는 점이다.

선분 DA 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 G 라 하면

$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$ 이므로 선분 PG 의

길이가 최소일 때 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$ 가 최소이다.

그러므로 점 Q 는 점 G 에서 선분 CD 에 내린

수선의 발이다.

점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을

H 라 하면 $\overline{DH}=6$

$\overline{QH}=\dfrac{1}{3}\overline{DH}=2$, $\overline{AH}=3\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{QA}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$

$\overline{OA}=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로

점 R 는 삼각형 ABC 의 외접원 위의 점이다.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})$

$\quad=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QO}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta_1\ (0\le\theta_1\le\pi)$ 라 하자.

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} = |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AI} : \overline{AH} = \overline{OA} : \overline{QA}$

$\overline{AI} : 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} : \sqrt{31}$

$\overline{AI} = \dfrac{18}{\sqrt{31}} = \dfrac{18\sqrt{31}}{31}$

$\overline{QI} = \overline{QA} - \overline{AI} = \sqrt{31} - \dfrac{18\sqrt{31}}{31} = \dfrac{13\sqrt{31}}{31}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1\\ &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QI}|\\ &= \sqrt{31} \times \frac{13\sqrt{31}}{31} = 13\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{OR}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_2\ (0 \le \theta_2 \le \pi)$라 하자.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR} &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|\cos\theta_2\\ &= \sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos\theta_2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{OR}$가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$의 최댓값은

$\sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos 0 = 2\sqrt{93}$

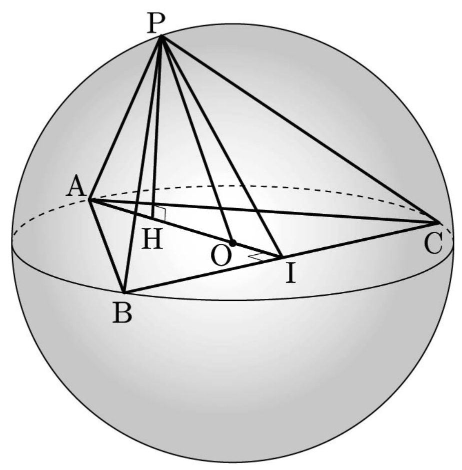
$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR} &= (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO}) + (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR})\\ &\le 13 + 2\sqrt{93}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR}$의 최댓값은 $13 + 2\sqrt{93}$

$p = 13$, $q = 2$

따라서 $p + q = 15$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle PAO = \dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$이므로

삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$\overline{PA} = 4$, $\overline{PH} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AH} = \overline{OH} = 2$

$\overline{OI} = a\ (a > 0)$이라 하면

직각삼각형 OIB에서

$\overline{IB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{16 - a^2}$

직각삼각형 AIB에서

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2}\\ &= \sqrt{(a+4)^2 + 16 - a^2}\\ &= \sqrt{8a + 32}\end{aligned}$$

직각삼각형 PHI에서

$$\begin{aligned}\overline{PI} &= \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HI}^2}\\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a+2)^2}\\ &= \sqrt{a^2 + 4a + 16}\end{aligned}$$

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{BC}$이다.

직각삼각형 PIB에서

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \sqrt{\overline{PI}^2 + \overline{IB}^2}\\ &= \sqrt{(a^2 + 4a + 16) + (16 - a^2)}\\ &= \sqrt{4a + 32}\end{aligned}$$

삼각형 PAB에서

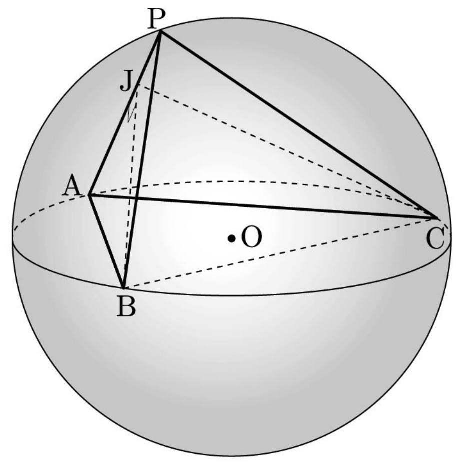
$$\begin{aligned}\cos(\angle PAB) &= \frac{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2 \times \overline{AP} \times \overline{AB}}\\ &= \frac{16 + (8a+32) - (4a+32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a+32}}\\ &= \frac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}\end{aligned}$$

그러므로 $\dfrac{\sqrt{10}}{8} = \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

$(a+4)^2 = 5(a+4)$

$a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\sin(\angle PAB) = \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}}$

$\sin(\angle PAB) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$이므로

$\overline{BJ} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

삼각형 PAB의 넓이를 S'이라 하자.

$S' = \dfrac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{BJ} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{PB} = \overline{PC}$이므로

두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$\overline{BJ} \perp \overline{AP}$이므로 $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이고 $\overline{BJ} = \overline{CJ}$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\overline{BJ} \perp \overline{AP}$, $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이므로

$\theta = \angle BJC$

$\overline{JB} = \overline{JC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{15}$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{JB} \times \overline{JC}}\\ &= \frac{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}\\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$S = S' \times \cos\theta = 3\sqrt{15} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $30 \times S^2 = 30 \times \dfrac{15}{9} = 50$