• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	③	4	④	5	⑤
6	③	7	①	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	④	13	①	14	②	15	①
16	5	17	15	18	109	19	80	20	226
21	8	22	82						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$\sqrt{8}\times 4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=4$

2. [출제의도] 다항함수의 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^2(2x^3+3x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=16$

3. [출제의도] 등비수열의 항을 구한다.

$a_1a_3=(a_2)^2=4,\ a_3a_5=(a_4)^2=64$에서

$a_2=2,\ a_4=8$이고 등비수열 $\{a_n\}$의

공비는 2이므로 $a_6=8\times 2^2=32$

4. [출제의도] 함수의 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=4+(-2)=2$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로 $\sin\theta=-2\cos\theta$이다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

$f(1)=a+1,\ f'(1)=1$이므로

곡선 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(x-1)+a+1$, 즉 $y=x+a$

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a, 0)$, $(0, a)$이다.

$\overline{PQ}=6$에서 $\sqrt{a^2+a^2}=6,\ a^2=18$

$a>0$이므로 $a=3\sqrt{2}$

7. [출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서 $0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx$

$=2\int_0^2(-2x^2+6x)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2=\frac{40}{3}$

8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

(ⅰ) $1\le n\le 10$인 경우

$a_1=20,\ a_{n+1}=a_n-2$이므로 $a_n=-2n+22$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(-2n+22)=110$

(ⅱ) $11\le n\le 30$인 경우

$a_{10}=2$이므로 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ -2 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$

$\sum_{n=11}^{30}a_n=(-2)\times 10=-20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sum_{n=1}^{30}a_n=110+(-20)=90$

9. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하자.

(ⅰ) $n\le 1$일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅱ) $n=2$일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅲ) $n\ge 3$일 때, 주어진 등식의 좌변의 n차항의 계수가 $n-3$이고 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$xf'(x)-3f(x)=x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx)$

$=-ax^2-2bx$

주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-a=2,\ -2b=-8$

에서 $a=-2$, $b=4$이고 $f(x)=x^3-2x^2+4x$

따라서 $f(1)=1-2+4=3$

10. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$에서

$\log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$

$\log_2\{-x(x+2a)\}=0$

$-x(x+2a)=1$

$x^2+2ax+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-2a,\ x_1x_2=1$

이다. 이때

$y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2$

$=-\log_2 1=0$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a, 0)$이다.

선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에

있으므로 $-4a+5=0$에서 $a=\frac{5}{4}$

$a=\frac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2+\frac{5}{2}x+1=0,\ 2x^2+5x+2=0$

$(x+2)(2x+1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이고

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$

11. [출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$f(4)=\lim_{x\to 4-}f(x)=16a+4b-24$이고

$f(0)=f(4)$이므로 $-24=16a+4b-24$에서

$b=-4a$ …… ㉠

$0\le x<4$에서 $f(x)=a(x-2)^2-4a-24$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 1개 가지면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로

$f(1)f(2)=(-3a-24)(-4a-24)$

$=12(a+8)(a+6)<0$

$-8<a<-6$이고 a는 정수이므로 $a=-7$

㉠에 의하여 $b=28$

따라서 $a+b=-7+28=21$

12. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의

x좌표는 $0\le x<\frac{4\pi}{a}$일 때 방정식

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ …… ㉠

의 실근과 같다.

$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t+2|=2$ …… ㉡

에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은

$0,\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2}$

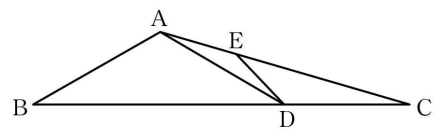
의 6개이고 이 6개의 실근의 합은 11π이다.

따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로

$39a-\frac{\pi}{3}\times 6=11\pi,\ a=\frac{\pi}{3}$

따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABC)=\frac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times 2\times 3\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

이다. 삼각형 ABD에서

$\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=\boxed{2}$이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$

이므로

$\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{13}=\frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE 에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}=2\times2\times\sin(\angle\mathrm{CAD})=\boxed{\frac{2\sqrt{39}}{13}}$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=2$, $r=\frac{2\sqrt{39}}{13}$ 이므로

$p\times q\times r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{39}}{13}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$

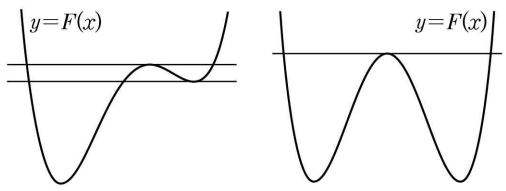
14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 주어진 방정식은 $\int_t^x f(s)\,ds=F(x)-F(t)=0$ 이므로 $F(x)=F(t)$ 이다.

따라서 $g(t)$ 는 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(t)$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

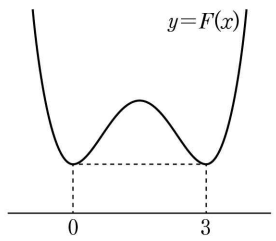
ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$ 이다.
함수 $F(x)$ 는 $x<1$ 에서 감소, $x>1$ 에서 증가하므로 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.
따라서 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(1)$ 은 오직 한 점에서 만나므로 $g(1)=1$ 이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 일 때, 함수 $F(x)$ 의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(a)$ 가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a 가 존재한다.



따라서 $g(a)=3$ 인 실수 a 가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$ 인 실수 b 가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$ 의 개형은 다음과 같고, $F(0)=F(3)$ 이다.



$f(0)=F'(0)=0$ 이고 $f(3)=F'(3)=0$ 이므로

$F(x)-F(0)=\frac{x^2(x-3)^2}{4}=\frac{x^4-6x^3+9x^2}{4}$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x$

이므로 $f(4)=64-72+18=10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

S_n 이 주어진 조건을 만족시키면 $i\neq j$ 인 임의의 두 자연수 i, j 에 대하여

$S_i-S_j\neq0$ 이므로

$S_i-S_j=(pi^2-36i+q)-(pj^2-36j+q)$
$=(i-j)(pi+pj-36)\neq0$

따라서 $i+j\neq\frac{36}{p}$

$p\le4$ 이면 $i+j=\frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수 i, j 가 존재한다.

$p=5$ 이면 $i+j=\frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수 i, j 가 존재하지 않는다.

따라서 p 의 최솟값은 5, 즉 $p_1=5$ 이다.

$p=5$ 일 때 $S_n=5n^2-36n+q$ 이므로

$a_1=S_1=q-31$,

$n\ge2$ 일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=10n-41$

이때

$a_2=-21$, $a_3=-11$, $a_4=-1$, $a_5=9$, $a_6=19$, $a_7=29$, $\cdots$

$|a_k|<a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수가 3 이므로 k 의 값은 3, 4, 5 이다.

$11<a_1\le19$, $11<q-31\le19$

$42<q\le50$

이다. 따라서 모든 q 의 값의 합은

$43+44+\cdots+50=\frac{8\times(43+50)}{2}=372$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값을 계산한다.

$\log_2 96+\log_{\frac{1}{4}}9=\log_2 96+\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^{-2}}$
$=\log_2(2^5\times3)-\log_2 3=5$

17. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값을 구한다.

$f(x)=x^3-3x^2+ax+10$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이므로

$f'(3)=27-18+a=0$, $a=-9$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+10=15$

18. [출제의도] 자연수의 합의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$

$=7^2+\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$

$=49+\sum_{k=1}^{5}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$

$=49+4\sum_{k=1}^{5}k=49+4\times\frac{5\times6}{2}=109$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

점 P 의 시각 t 에서의 가속도 $a(t)$ 는

$a(t)=v'(t)=12t^2-48$

$a(k)=12(k^2-4)=0$ 에서 $k>0$ 이므로 $k=2$ 이다.

$0\le t\le2$ 일 때 $v(t)\le0$ 이므로

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|\,dt=\int_0^2(-4t^3+48t)\,dt$

$=\left[-t^4+24t^2\right]_0^2=-16+96=80$

20. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$

이므로 삼차식 $f(x)-1$ 은 x 를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$ 에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$ 라 하자.

$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}$

$=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$

$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}$

$=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$

$|g(0)|=-|g(0)|$ 에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$ 도 x 를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a 는 실수)

라 하면 $f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\ge-4x^2+x$ 에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge-4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\ge0$

$x^2(x^2+ax+4)\ge0$

$x^2\ge0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$x^2+ax+4\ge0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$ 의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le0$

$-4\le a\le4$

$f(5)=25a+126$ 이므로 구하는 $f(5)$ 의 최댓값은 $a=4$ 일 때 226 이다.

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}k\,(k>0)$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{19}k$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4k$ 이다.

두 점 A, B 의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 라 하자. 직선 OA 와 x 축이 이루는 예각의 크기가 $60°$ 이므로

$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}k$, $y_1=\frac{3}{2}k$

따라서 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right)$

직선 AB 의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직선 AB 와 x 축이 이루는 예각의 크기가 $30°$ 이다.

$x_2-x_1=4k\cos30°=2\sqrt{3}k$ 에서

$x_2=x_1+2\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$

$y_2-y_1=4k\sin30°=2k$에서

$y_2=y_1+2k=\frac{7}{2}k$

따라서 $\mathrm{B}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$

점 A 는 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}k=a^{\sqrt{3}k}-1$ 에서 $a^{\sqrt{3}k}=\frac{3k+2}{2}$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=a^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{7}{2}k=a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}-1$ 에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}=\frac{7k+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3=\left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$

$27k^3-44k^2-20k=0$, $k(k-2)(27k+10)=0$

$k>0$ 이므로 $k=2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=4k=8$

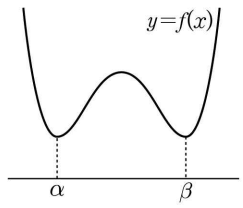
22. [출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수에 대한 문제를 해결한다.

사차함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$ 는

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-f(\alpha) & (t<\alpha) \\ f(\alpha)-f(t) & (t\ge\alpha)\end{cases}$$

구간 $(-\infty, \alpha)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 감소하므로 함수 $g(t)$ 도 감소하고, 구간 $[\alpha, \infty)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 증가하므로 함수 $g(t)$ 는 감소한다.
실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$ 가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수 k 가 존재하지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$ 에서 극솟값을 가지고, $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$ 라 하자.

(i) $f(\alpha)=f(\beta)$ 인 경우

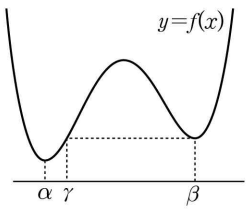


함수 $f(x)$ 의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ 0 & (\alpha\le t\le\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ii) $f(\alpha)<f(\beta)$ 인 경우

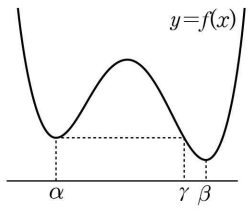


$\alpha<x<\beta$ 일 때, $f(x)=f(\beta)$ 의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ a-f(t) & (\alpha\le t<\gamma) \\ a-b & (\gamma\le t\le\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

$a-b<0$ 이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(iii) $f(\alpha)>f(\beta)$ 인 경우



$\alpha<x<\beta$ 일 때, $f(x)=f(\alpha)$ 의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-b & (t<\alpha) \\ a-b & (\alpha\le t\le\gamma) \\ f(t)-b & (\gamma<t<\beta) \\ b-f(t) & (t\ge\beta)\end{cases}$$

$a-b>0$ 이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$ 이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서
$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$
이다. 또 $g(4)=0$ 이므로 $\beta=4$ 이고 $f'(4)=0$ 이다.
$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하자.
$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$ 이므로
$f'(4)=0$ 에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$
$10-2p=0$, $p=5$
그러므로
$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$
$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)$
$=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$
$g(-1)=f(-1)-f(4)$
$=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$
따라서 $k+g(-1)=82$

[확률과 통계]

23	②	24	①	25	③	26	④	27	⑤
28	④	29	105	30	17				

23. [출제의도] 모표준편차와 표본의 크기를 이용하여 표본평균의 표준편차를 계산한다.

모표준편차가 12 이고 표본의 크기가 36 이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{12}{\sqrt{36}}=\dfrac{12}{6}=2$

24. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구한다.

다항식 $(x^2+1)(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 (x^2+1) 에서 x^2 의 계수 1과 $(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수를 곱한 것과 같다.
$(x-2)^5$ 의 전개식에서 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2)^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
$r=1$ 일 때 x^4 의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_1\times(-2)=-10$
따라서 $(x^2+1)(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 $1\times(-10)=-10$

25. [출제의도] 이산확률변수의 평균과 분산을 구한다.

$\mathrm{E}(X)=(-3)\times\dfrac{1}{2}+0\times\dfrac{1}{4}+a\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{4}$

$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{4}=-1$ 에서 $a=2$

$\mathrm{V}(X)=(-3+1)^2\times\dfrac{1}{2}+(0+1)^2\times\dfrac{1}{4}+(2+1)^2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{9}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(2X)=2^2\times\mathrm{V}(X)=4\times\dfrac{9}{2}=18$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

조건 (가)를 만족시키는 네 자연수는
1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2
이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는
1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

(i) 네 자연수 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(ii) 네 자연수 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $12+4=16$

27. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구한다.

10 장의 카드 중 임의로 카드 4 장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ 이다.
$a_1\times a_2$ 의 값이 홀수인 경우는 다음과 같다.

(i) 순서쌍 (a_1, a_2) 가 $(1, 3)$ 또는 $(1, 5)$ 또는 $(3, 5)$ 인 경우
$a_3+a_4\ge16$ 을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4) 는
$(6, 10)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$, $(8, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$
으로 6 가지이다.
이때 구하는 경우의 수는 $3\times6=18$

(ii) 순서쌍 (a_1, a_2)가 $(1, 7)$ 또는 $(3, 7)$ 또는 $(5, 7)$ 인 경우
$a_3+a_4\ge16$ 을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4) 는
$(8, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$
으로 3 가지이다.
이때 구하는 경우의 수는 $3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\dfrac{18}{210}+\dfrac{9}{210}=\dfrac{27}{210}=\dfrac{9}{70}$

28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률변수의 평균과 표준편차를 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같다.
확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면
확률변수 Y의 평균은 $m-6$, 표준편차는 σ이다.
표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여
조건 (가)에서
$\mathrm{P}(X\le11)=\mathrm{P}(Y\ge23)$
$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{11-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{29-m}{\sigma}\right)$
$\dfrac{11-m}{\sigma}=-\dfrac{29-m}{\sigma}$ 에서 $m=20$
조건 (나)에서
$\mathrm{P}(X\le k)+\mathrm{P}(Y\le k)=1$
$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-14}{\sigma}\right)=1$
$\dfrac{k-20}{\sigma}=-\dfrac{k-14}{\sigma}$ 에서 $k=17$
$\mathrm{P}(X\le17)+\mathrm{P}(Y\ge17)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{3}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)$
$=2\times\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)$
$\mathrm{P}(X\le17)+\mathrm{P}(Y\ge17)=0.1336$ 에서
$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)=0.0668$
표준정규분포표에서
$\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$, 즉 $\mathrm{P}(Z\ge1.5)=0.0668$
$\dfrac{3}{\sigma}=1.5$ 에서 $\sigma=2$
따라서 $\mathrm{E}(X)+\sigma(Y)=m+\sigma=20+2=22$

29. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(i) 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우
$f(1)\ge4$ 인 함수 f의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

(ii) 조건 (다)를 만족시키지 않는 경우
$f(3)-f(1)>4$ 에서
$f(1)=1$, $f(3)=6$ 이어야 하므로
$f(4)=6$, $1\le f(2)\le6$
이때 함수 f의 개수는 6

(i), (ii)를 동시에 만족하는 경우는 없다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $126-(15+6)=105$

30. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

[실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은 사건을 X, [실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공 중 흰 공이 2 개인 사건을 Y라 하자.

(i) [실행 1]에서 동전의 앞면이 나오고, [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은 경우
[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 2 개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 5 개이거나
[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 1 개와 검은 공 1 개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 4 개와 검은 공 1 개일 확률은
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_5\mathrm{C}_5}{{}_6\mathrm{C}_5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_5}$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{8}$

(ii) [실행 1]에서 동전의 뒷면이 나오고, [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은

경우

[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 2개와 검은 공 1개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 5개일 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2\times{}_1C_1}{{}_4C_3}\times\frac{{}_5C_5}{{}_7C_5}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{21}=\frac{1}{56}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$P(X)=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

$$P(X\cap Y)=\frac{1}{24}+\frac{1}{56}=\frac{10}{168}=\frac{5}{84}$$

그러므로 구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{5}{84}}{\frac{1}{7}}=\frac{5}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로

$p+q=17$

[미적분]

23	①	24	③	25	⑤	26	②	27	④
28	②	29	20	30	12				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

24. [출제의도] 로그함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3}=\frac{f'(0)}{3}$$

$\frac{f'(0)}{3}=2$에서 $f'(0)=6$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}\ (\text{단, } \cos t+\sin t\neq0)$$

$\frac{dy}{dx}=3$인 t의 값을 $\alpha\ (0<\alpha<\pi)$라 하면

$\cos\alpha=-3\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

26. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$$

$=1-\ln2$

27. [출제의도] 도형 사이의 관계를 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자. $\angle A_nB_nD_n=\theta$라 하면

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta=\frac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형 $A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}$$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형 $D_1F_1H_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times1^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}$$

그러므로

$$a_1=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{1}{20}$$

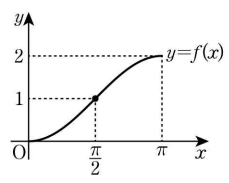
$$\frac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{B_1D_1}-(\overline{B_1B_2}+\overline{D_1D_2})}{\overline{B_1D_1}}=\frac{3}{5}$$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

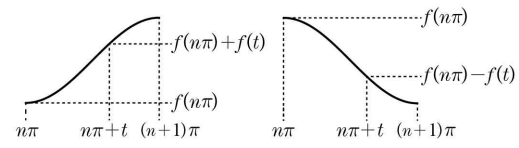
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

28. [출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

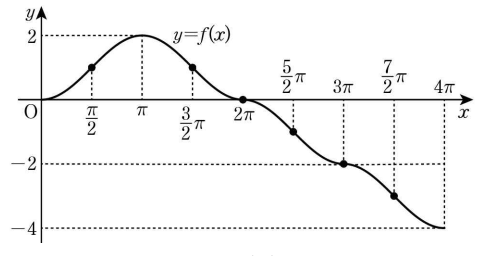


조건 (나)에 의하여 $n\pi<x\le(n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



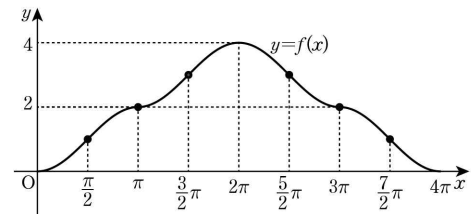
위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\pi\times2$$

$$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx+2\pi$$

$$=4\Big[x-\sin x\Big]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$$

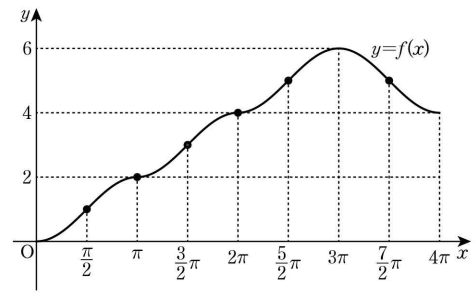
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times2=8\pi$$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times5=14\pi$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

29. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$이므로

$\angle OST=2\theta$, $\angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)

+ (삼각형 OTR의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$$

$$=\theta+\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$$

$$=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}$$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)

− (삼각형 OST의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\sin3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$ 이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

30. [출제의도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.
조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)\,dt$$

$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$
위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)\,dt$$
$$=\int_{3a-x}^{4a}g(t)\,dt+\int_{4a}^{2a+2}g(t)\,dt$$

$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{4a}g(t)\,dt$에서 $\int_{4a}^{2a+2}g(t)\,dt=0$
조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$
$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$
조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로
$16-24+q=5$에서 $q=13$
$h(x)=x^2-6x+13$에서
$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$$\int_3^5\{f'(x)+2a\}g(x)\,dx$$
$$=\int_3^5\{f'(x)+2\}g(x)\,dx=\int_3^5h'(x)\ln h(x)\,dx$$
$$=\Big[h(x)\ln h(x)\Big]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$
$$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$$
$$=8\ln8-4\ln4-(8-4)=-4+16\ln2$$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로
$m+n=12$

[기하]

23	③	24	⑤	25	④	26	②	27	①
28	⑤	29	54	30	48				

23. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 중점의 좌표를 계산한다.

선분 AB의 중점이 xy평면 위에 있으려면
중점의 z좌표가 0이어야 하므로
$\frac{-2+a}{2}=0$에서 $a=2$이다.

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y=2x\pm\sqrt{16\times2^2+8}$, $y=2x\pm6\sqrt{2}$
두 직선의 y절편은 각각 $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$이다.
따라서 $\overline{AB}=12\sqrt{2}$

25. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 벡터의 크기를 구한다.

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$
조건 (나)에서 $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=6$
사각형 ABCD는 평행사변형이면서 두 대각선 AC, BD의 길이가 같으므로 직사각형이다.
따라서 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

26. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{AH'}\times\overline{BC}=6$에서 $\overline{AH'}=4$
$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{AH'}\perp\overline{BC}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HH'}\perp\overline{BC}$
두 직각삼각형 BH′H, BCD의 닮음비는 $1:3$이므로
$\overline{HH'}=1$, $\overline{H'C}=2$
$\overline{HC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{AH}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$
따라서 삼각형 AHC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구한다.

포물선 $x^2=8(y+2)$에서
초점 F의 좌표는 $(0,0)$, 준선의 방정식은 $y=-4$
점 P의 좌표를 (a,b) $(a>0,\ b>0)$이라 하자.
점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{PF}=\overline{PH}$
$\overline{PH}+\overline{PF}=40$에서 $\overline{PF}=\overline{PH}=20$
$\overline{PH}=|b-(-4)|=20$에서 $b=16$
$\overline{PF}=\sqrt{a^2+16^2}=20$에서 $a=12$
점 $P(12,16)$은 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로
$16^2=48p$이다.
따라서 $p=\frac{16}{3}$

28. [출제의도] 벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

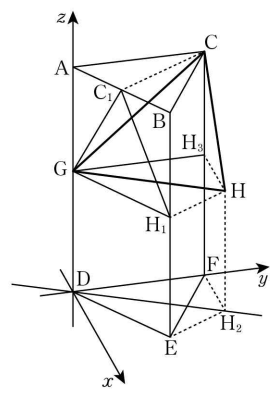
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$에서 $\angle COB=90°$, $\angle AOC=30°$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OC}|\times\cos30°=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{OC}|$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=24$에서 $|\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{3}$
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-|\overrightarrow{OP}|^2$
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-16$ …… ㉠
$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$0°\le\theta\le90°$이고
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ})$
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$
$=16\sqrt{3}\cos\theta+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$
$\theta=0°$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이므로
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le16\sqrt{3}+4$ …… ㉡
$\theta=90°$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 반대일 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최소이므로
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge-4$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$-4-16\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}\le16\sqrt{3}+4-16$
$M=16\sqrt{3}-12$, $m=-20$
따라서 $M+m=16\sqrt{3}-32$

29. [출제의도] 이차곡선의 접선을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$에서 점 P는 두 초점이 $F_1(4,0)$, $F_2(-6,0)$이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1,0)$이므로
쌍곡선의 방정식은
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ …… ㉠
점 P는 포물선 $y^2=16x$와 쌍곡선 ㉠의 교점이므로
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{16x}{16}=1$, $x^2-7x-8=0$,
$(x-8)(x+1)=0$, $x=8$ 또는 $x=-1$
제1사분면 위의 점 P의 좌표는 $(8,8\sqrt{2})$이다.
포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식이
$8\sqrt{2}y=8(x+8)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+8)$ …… ㉡
이므로 점 F_3의 좌표는 $(-8,0)$이다.
두 점 $F_1(4,0)$, $F_3(-8,0)$을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은 x축 또는 직선 $x=-2$ 위에 있다.
이때 선분 PF_3 위에 있는 꼭짓점은 직선 $x=-2$ 위에 있으므로 ㉡에 $x=-2$를 대입하면 $y=3\sqrt{2}$
이 타원의 단축의 길이는 $6\sqrt{2}$이고 두 초점 사이의 거리는 12이다.
따라서 $a^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=54$

30. [출제의도] 평면과 직선의 위치 관계를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

그림은 정삼각기둥 ABC−DEF를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H의 평면 ADEB 위로의 정사영을 각각 C_1, H_1이라 하자.
$\overline{AC_1}=2$, $\overline{AG}=2\sqrt{3}$이므로
$\overline{GC_1}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$, $\angle AGC_1=30°$
조건 (가)에서 삼각형 GH_1C_1은 정삼각형이므로
$\angle C_1GH_1=60°$, $\overline{GH_1}=4$
조건 (나)를 만족시키려면 점 H_1은 점 G에서 선분 BE에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.
점 H의 평면 DEF 위로의 정사영을 H_2라 하자.
조건 (나)에서 삼각형 CGH의 평면 DEF 위로의 정사영인 삼각형 FDH_2의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF의 넓이의 $\frac{1}{2}$인 $2\sqrt{3}$이므로 직선 DH_2는 선분 EF의 중점을 지난다.
그러므로 두 삼각형 DEH_2, DFH_2가 합동이고
$\angle DEH_2=90°$이므로 $\angle DFH_2=90°$이다.
점 H의 평면 ADFC 위로의 정사영을 H_3이라 하면 점 H_3은 점 G에서 선분 CF에 내린 수선의 발과 일치한다.
그러므로 삼각형 CGH의 평면 ADFC 위로의 정사영인 삼각형 CGH_3의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
따라서 $S^2=48$