2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제(자연계열 A형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

> 좌표평면에 곡선 $C: y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$이 있다. 점 P와 Q는 곡선 C 위에서 시각 t가 증가할 때 x좌표가 증가하는 방향으로 움직인다.
> 시각 $t=0$일 때, 점 P와 Q는 다음을 만족시킨다.
> (가) 점 P의 좌표는 $(0,1)$이다.
> (나) 점 Q는 제1사분면에 위치한다.
> (다) 점 $(0,1)$로부터 Q까지의 C의 길이는 3이다.

(1-1) 곡선 C의 $x=0$에서 $x=1$까지의 길이를 구하시오. (60점)

(1-2) 시각 $t=0$일 때, 점 Q의 좌표를 구하시오. (60점)

(1-3) 점 P와 Q가 시각 t에서 각각 다음과 같은 속력으로 움직인다.

$$u(t)=6t^{2}-8t+14, \quad v(t)=3t^{2}+4t+5$$

시간 $t \geq 0$에서 점 P와 Q가 만나는 횟수를 구하시오. (60점)

[문제 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

> 어느 공장에서 생산되는 제품의 불량률은 이 제품을 생산하는 기계의 작동상태에 따라 다르다. 이 기계가 정상적으로 작동할 경우 불량률은 0.01이고, 정상적으로 작동하지 않을 경우 불량률은 0.10이라고 한다. 이 기계의 작동상태를 관리하기 위하여 관리자는 기계에 센서를 설치하였다. 이 센서에 빨간 신호가 켜지면 기계의 작동상태가 정상적이지 않다는 것을 나타낸다.
> 이 기계가 정상적으로 작동하지 않는 경우 센서에 빨간 신호가 켜지는 확률을 p_1, 기계가 정상적으로 작동하는 경우 센서에 빨간 신호가 켜지지 않는 확률을 p_2, 센서에 빨간 신호가 켜졌을 때 실제로 이 기계가 정상적으로 작동하고 있지 않을 확률을 p_3이라 하자. 즉, A를 이 기계가 정상적으로 작동하지 않을 사건이라 하고 B를 이 센서에 빨간 신호가 켜지는 사건이라 할 때,
> $p_1=\mathrm{P}(B|A)$, $p_2=\mathrm{P}(B^{C}|A^{C})$, $p_3=\mathrm{P}(A|B)$이다.
> 이 기계가 정상적으로 작동하지 않을 확률 $\mathrm{P}(A)$는 0.01로 일정하며, 현재 $p_1=0.80$, $p_2=0.90$이라고 한다.

(2-1) 이 기계에서 생산되는 제품 중에서 임의로 한 개를 골랐을 때 이 제품이 불량품일 확률을 구하시오. (60점)

(2-2) 확률 p_3을 구하시오. (60점)

(2-3) 확률 p_3은 (2-2)에서 구한 값보다 작아지지 않으면서, p_2는 낮추고 p_1을 최대한 높이고자 한다. 확률 p_1은 0.01 증가할 때마다 100만원씩의 추가 비용이 발생하며, p_2는 0.01 감소할 때마다 50만원씩의 비용이 절약된다. 추가로 드는 비용이 1500만원을 넘지 않는 범위 내에서 p_1의 최댓값을 구하시오. (60점)

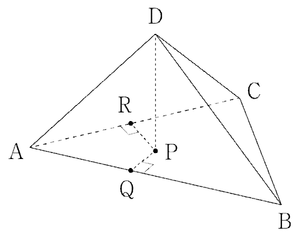
[문제 3] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

그림과 같은 사면체 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=8,\quad \overline{AC}=6,\quad \overline{AD}=3\sqrt{2},$$

$$\cos(\angle DAC)=\frac{\sqrt{6}}{3},\ \cos(\angle CAB)=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \cos(\angle DAB)=\alpha$$

이다. 점 D에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 P, 점 P에서 변 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 R라 하자. (단, 점 P는 삼각형 ABC의 내부에 있다.)



(3-1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (60점)

(3-2) 선분 AR의 길이를 구하시오. (60점)

(3-3) 선분 PQ의 길이를 α의 식으로 나타내시오. (60점)

(3-4) 사면체 ABCD의 부피가 $4\sqrt{15}$일 때, α의 값을 구하시오. (60점)

2017학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 출제기준표(자연계열 A형)

1번 문항 출제 의도

미분법과 적분법을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	109-112
	기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2016	110-113

2번 문항 출제 의도

조건부 확률의 뜻을 이해하고 확률의 곱셈정리를 활용할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2016	73-80
	확률과 통계	김창동 외	교학사	2016	93-106

3번 문항 출제 의도

삼수선의 정리와 삼각함수를 활용하여 기하 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2016	118-125
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	131-136

2017학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 A형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	● $\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\,dt$ 까지: 20점 ● $\int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt$까지: 40점 ● $\frac{e-e^{-1}}{2}$: 60점	60
1-2	● $\int_0^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$까지: 30점 ● $x=\ln(3\pm\sqrt{10})$까지: 40점 ● $x=\ln(3+\sqrt{10})$까지: 50점 ● $(\ln(3+\sqrt{10}),\ \sqrt{10})$: 60점	60
1-3	● $\int_0^t u(z)\,dz=2t^3-4t^2+14t$: +10점 ● $3+\int_0^t v(z)\,dz=t^3+2t^2+5t+3$: +10점 ● $t^3-6t^2+9t-3=0$: +10점 ● $g(t)=t^3-6t^2+9t-3$의 그래프의 개형을 이해하여 x 축과 3번 만남을 보이면: +30점	60

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	● $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap A^C)$만 있으면: 10점 ● $P(D)=P(D\|A)P(A)+P(D\|A^C)P(A^C)$만 있으면: 30점 ● $0.1\times0.01+0.01\times0.99$ 또는 $\frac{10+99}{100+9900}$ 또는 이와 동등한 식만 있으면: 50점 ● $\frac{109}{10000}$ 또는 0.0109: 60점	60
2-2	● $p_3=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$만 있으면: 10점 ● $p_3=\frac{\mathrm{P}(B\|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B\|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\|A^C)\mathrm{P}(A^C)}$ 만 있으면: 30점 ● $p_3=\frac{0.8\times0.01}{0.8\times0.01+0.1\times0.99}$ 또는 $p_3=\frac{80}{80+990}$ 또는 이와 동등한 식만 있으면: 50점 ● $p_3=\frac{8}{107}$: 60점	60
2-3	● $\int_0^t u(z)\,dz=2t^3-4t^2+14t$: +10점 ● $3+\int_0^t v(z)\,dz=t^3+2t^2+5t+3$: +10점 ● $t^3-6t^2+9t-3=0$: +10점 ● $g(t)=t^3-6t^2+9t-3$의 그래프의 개형을 이해하여 x 축과 3번 만남을 보이면: +30점	60

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	● $\sin(\angle \mathrm{CAB})=\frac{\sqrt{6}}{3}$: 30점 ● ABC 의 넓이 $8\sqrt{6}$: 60점	60
3-2	● 삼수선의 정리를 언급하면: +10점 ● $\overline{\mathrm{AR}}=2\sqrt{3}$: +50점 ● $\overline{\mathrm{AR}}=2\sqrt{3}$ 를 얻지 못했지만, $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AD}}\cos(\angle \mathrm{DAC})$식이 있으면: +10점	60
3-3	● $\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2}\,\alpha$: +10점 ● $\overline{\mathrm{AS}}=6$ 또는 $\overline{\mathrm{QS}}=6-3\sqrt{2}\,\alpha$: +20점 ● $\overline{\mathrm{RS}}=2\sqrt{6}$: +10점 ● $\overline{\mathrm{PQ}}=3(\sqrt{2}-\alpha)$: 60점	60
3-4	● $\overline{\mathrm{DP}}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$: +10점 ● $(\overline{\mathrm{DP}})^2=9(2\sqrt{2}\,\alpha-3\alpha^2)$: +20점 ● $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{12}$: +10점 ● $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{12}$ 를 얻고 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 인 경우 점 P가 삼각형 ABC 의 외부에 있다고 언급하고 $\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{12}$ 을 얻으면: 60점	60

2017학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 답안 예시(자연계열 A형)

[문제 1]

$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 라 하자.

(1-1) $x=0$에서 $x=1$까지의 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

이다.

(1-2) $x>0$일 때, 점 $(0,1)$로부터 점 $(x,f(x))$까지 곡선의 길이는

$$\int_0^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\,dt=\int_0^x \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$$

이다.

$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=3$ 으로부터 $e^{2x}-6e^x-1=0$이므로 $x=\ln(3+\sqrt{10})$이다. 이 때, $y=f(x)$에 대입하면 $y=\sqrt{10}$. 따라서 $t=0$일 때, 점 Q의 좌표는 $(\ln(3+\sqrt{10}),\ \sqrt{10})$이다.

(1-3) 시각 t에서 점 $(0,1)$과 점 P 사이의 곡선의 길이는 $\int_0^t u(z)\,dz=2t^3-4t^2+14t$이다.

시각 t에서 점 $(0,1)$과 점 Q 사이의 곡선의 길이는

$3+\int_0^t v(z)\,dz=t^3+2t^2+5t+3$이다.

$\int_0^t u(z)\,dz=3+\int_0^t v(z)\,dz$로부터 $t^3-6t^2+9t-3=0$이다.

$g(t)=t^3-6t^2+9t-3$라 하면, $g'(t)=3(t-1)(t-3)$이다.

$g(t)$는 3차 함수이고 $g(0)=-3,\ g(1)=1,\ g(3)=-3$이므로, $t\ge 0$에서 점 P와 Q는 3번 만난다.

[문제 2]

(2-1) D를 불량품이 추출될 사건이라고 하면 구하는 확률은 $P(D)$이다.

$$\begin{aligned} P(D)&=P(D\cap A)+P(D\cap A^C)\\ &=P(D|A)P(A)+P(D|A^C)P(A^C)\\ &=0.1\times 0.01+0.01\times 0.99=\frac{109}{10000}=0.0109 \end{aligned}$$

(2-2)

$$\begin{aligned} p_3 &= \mathrm{P}(A \mid B) \\ &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B|A^C)\mathrm{P}(A^C)} \\ &= \frac{0.8\times 0.01}{0.8\times 0.01+0.1\times 0.99} \\ &= \frac{8}{107} \approx 0.075 \end{aligned}$$

(2-3)

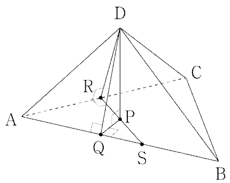
x를 p_1의 증가량이라 하고 y를 p_2의 감소량이라고 할 때 다음 두 조건을 만족하는 x를 구한다.

$$100x - 50y \le 15 \quad \left(\Leftarrow \frac{100\text{만원}}{0.01}\times x - \frac{50\text{만원}}{0.01}\times y \le 1500\text{만원}\right) \qquad \cdots\cdots \ (1)$$

$$\frac{(0.8+x)\times 0.01}{(0.8+x)\times 0.01+(0.1+y)\times 0.99} \ge \frac{8}{107} \qquad \cdots\cdots \ (2)$$

식 (2)를 풀면 $y \le \frac{x}{8}$ 이고 이를 식 (1)과 연립하면 $x \le \frac{4}{25} = 0.16$ 을 만족해야 한다. 따라서 주어진 조건 하에서 최대한 높일 수 있는 p_1의 값은 $0.8+0.16=0.96$ 이다.

[문제 3]



(3-1) $\sin(\angle\mathrm{CAB}) = \sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{CAB})} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\sin(\angle\mathrm{CAB}) = 8\sqrt{6}$$

(3-2) 삼수선의 정리에 의하여 선분 AR는 선분 DR에 수직이므로 다음을 얻는다.

$$\overline{\mathrm{AR}} = \overline{\mathrm{AD}}\cos(\angle\mathrm{DAC}) = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{3}$$

(3-3) 삼수선의 정리에 의하여 선분 AQ는 선분 DQ에 수직이므로 다음을 얻는다.

$$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AD}}\cos(\angle\mathrm{DAB}) = 3\sqrt{2}\,\alpha$$

선분 RP의 연장선이 선분 AB 또는 그 연장선과 만나는 점을 S라 하자.(위 그림 참조) 그러면

$$\overline{\mathrm{AS}} = \frac{\overline{\mathrm{AR}}}{\cos(\angle\mathrm{CAB})} = 6,\ \overline{\mathrm{RS}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AS}}^2-\overline{\mathrm{AR}}^2} = 2\sqrt{6},\ \overline{\mathrm{QS}} = \overline{\mathrm{AS}}-\overline{\mathrm{AQ}} = 6-3\sqrt{2}\,\alpha$$

이다. (결국 S는 위 그림과 같이 선분 AB 위에 있음을 알 수 있다.) $\triangle\mathrm{ASR}$와 $\triangle\mathrm{PSQ}$는 닮은 삼각형이므로 닮음비를 이용하면

$$\overline{\mathrm{PQ}} : 6-3\sqrt{2}\,\alpha = 2\sqrt{3} : 2\sqrt{6}$$

에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 3(\sqrt{2}-\alpha)$ 이다.

(3-4) 주어진 사면체는 밑면이 $\triangle\mathrm{ABC}$이고 높이가 $\overline{\mathrm{DP}}$인 삼각뿔이므로 부피 V는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\overline{\mathrm{DP}} = \frac{1}{3}\cdot 8\sqrt{6}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$$

따라서 $V = \frac{1}{3}\cdot 8\sqrt{6}\cdot\overline{\mathrm{DP}} = 4\sqrt{15}$를 풀어 $\overline{\mathrm{DP}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$을 얻는다. $\triangle\mathrm{DPQ}$에 피타고라스 정리를 적용하면

$$(\overline{\mathrm{DP}})^2 = (\overline{\mathrm{DQ}})^2 - (\overline{\mathrm{PQ}})^2 = (\overline{\mathrm{DQ}})^2 - 9(\sqrt{2}-\alpha)^2$$

을 얻고, $\triangle\mathrm{DAQ}$에 피타고라스 정리를 적용하면

$$(\overline{\mathrm{DQ}})^2 = (\overline{\mathrm{AD}})^2 - (\overline{\mathrm{AQ}})^2 = (3\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2}\,\alpha)^2 = 18(1-\alpha^2)$$

이다. 따라서

$$(\overline{\mathrm{DP}})^2 = (\overline{\mathrm{DQ}})^2 - 9(\sqrt{2}-\alpha)^2 = 9(2\sqrt{2}\,\alpha - 3\alpha^2)$$

이다. 근의 공식을 이용하여 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)^2 = (\overline{\mathrm{DP}})^2 = 9(2\sqrt{2}\,\alpha-3\alpha^2)$에서 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$를 얻는다. 그런데 $\cos(\angle\mathrm{DAB}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$일 때,

$(\overline{\mathrm{DP}})^2 = 9\left(2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right) = 6$이므로 $\overline{\mathrm{DP}} = \sqrt{6}$이고,

$\overline{\mathrm{DR}} = \overline{\mathrm{AD}}\cdot\sin(\angle\mathrm{DAC}) = \sqrt{6}$이므로 $\mathrm{P}=\mathrm{R}$이다. 그러므로 점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있기 위하여서는 $\cos(\angle\mathrm{DAB}) = \alpha > \frac{\sqrt{2}}{3}$이어야 하고 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$를 얻는다.