제 2 교시

수리 영역

나 형

성명		수험 번호	

○ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 써 넣으시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 써 넣고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $4^{-\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-A^{-1}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. 지수부등식 $2^{x^2} < 4 \cdot 2^x$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은? [3점]

① $2^{10}-3$ ② $2^{10}-1$ ③ 2^{10}
④ $2^{10}+1$ ⑤ $2^{10}+3$

5. 두 사건 A와 B가 독립이고

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{13}{15}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

6. 다항식 $(1+2x)^6(1-x)$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

7. 두 실수 x, y에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x+y & -x \\ y & x+y \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않고, 복소수 $z=x+y-3+xyi$의 제곱이 음의 실수일 때, xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

8. 집합 S_1, S_2, S_3은 다음과 같다.

$S_1=\{1,\ 2\}$

$S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$S_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는? [3점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

9. 순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

$$a_1 = 0.\dot{1}$$
$$a_2 = 0.\dot{1}\dot{0}$$
$$a_3 = 0.\dot{1}0\dot{0}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0.\dot{1}\underbrace{00\cdots0\dot{0}}_{0\text{은 }(n-1)\text{개}}$$
$$\vdots$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

10. 이차정사각행렬 A, B가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$

ㄴ. $AB^2=E$이면 $B^{-1}A^{-1}=B$이다.

ㄷ. $AB^2=B^2A$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 다음은 자연수 n에 대하여
$\log_2 n$이 유리수이면 n을 $n=2^k$ (단, k는 $k\geq 0$인 정수)
의 꼴로 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

<증명>

자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수라고 하자.

n이 자연수이므로

$n=2^k\cdot m$

을 만족시키는 $k\geq 0$인 정수 k와 홀수인 자연수 m이 존재한다. 그러면

$\log_2 n=$ (가)

따라서 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 하므로

$\log_2 m=\frac{q}{p}$ (단, p는 자연수이고 q는 정수)

로 놓을 수 있다. 그러면

(나)

m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다.

따라서 2^q도 홀수이어야 하므로

(다)

이고 $m=1$이다. 따라서 n을

$n=2^k$ (단, k는 $k\geq 0$인 정수)

의 꼴로 나타낼 수 있다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$k\log_2 m$	$m^q=2^p$	$q=1$
②	$k\log_2 m$	$m^p=2^q$	$q=1$
③	$k+\log_2 m$	$m^q=2^p$	$q=0$
④	$k+\log_2 m$	$m^p=2^q$	$q=1$
⑤	$k+\log_2 m$	$m^p=2^q$	$q=0$

12. 중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원에 대응되는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & r \end{pmatrix}$라 하자.
원 $(x+c-1)^2+y^2=c^2$에 대응되는 행렬이 A이고,
원 $(x-1)^2+y^2=k^2$에 대응되는 행렬이 A^2일 때,
$c+k$의 값은? (단, $c>0$이고 $k>0$이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 2개의 당첨제비가 포함되어 있는 10개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 동시에 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨제비일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$ 이다.)

$$a_1=1,\ \ a_2=3$$
$$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+4\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

일 때, a_{20}의 값은? [3점]

① 39 ② 43 ③ 47 ④ 51 ⑤ 55

15. $a>1$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.
ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 세 확률변수 X, Y, W는 각각 다음과 같다.

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.
Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.
W는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

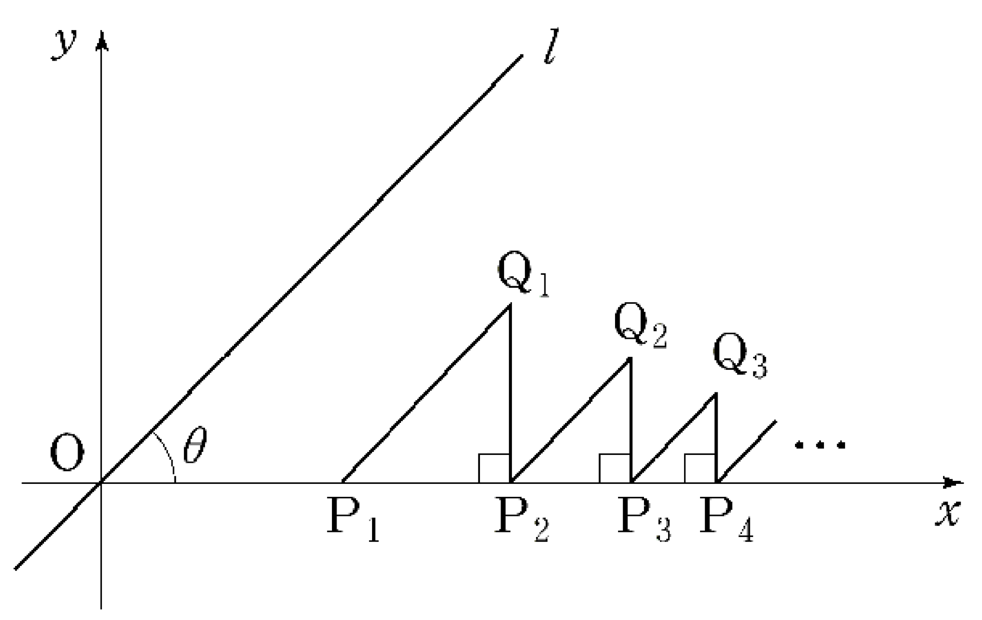
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right) < \mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)$
ㄴ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right) < \mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$
ㄷ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right) < \mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다.
점 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}_1} = \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자.
점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자.
점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고, 점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n에 대하여 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 a_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\text{이다.}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

단답형

18. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 200$일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

19. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+15n+13} - \sqrt{n^2-13n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

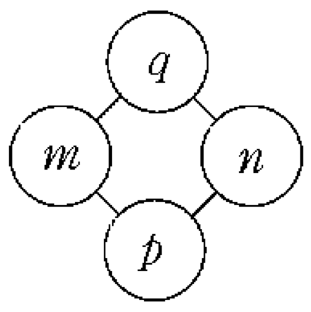
20. 두 실수 a, b가

$$a\log_3 2 = 4$$

$$\log_3 b = 1 - \log_3(\log_2 3)$$

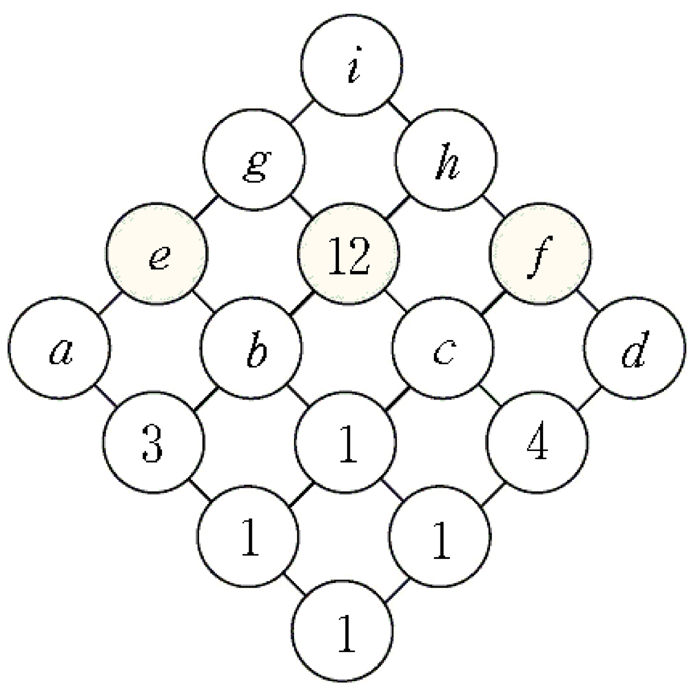
을 만족시킬 때, ab의 값을 구하시오. [3점]

21. 두 자연수 m과 n의 최대공약수를 p, 최소공배수를 q라 할 때, 이런 관계를 만족시키는 수를 [그림 1]과 같이 나타내기로 하자.



[그림 1]

[그림 2]는 [그림 1]의 관계를 만족시키도록 수를 연결하여 나타낸 것이다. 세 자연수 e, 12, f가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $e+f$의 값을 구하시오. [4점]

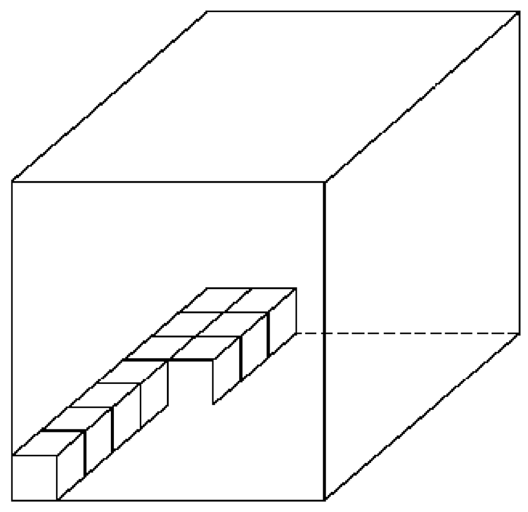


[그림 2]

22. 각 면에 1, 1, 2, 2, 2, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던졌을 때, 윗면에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $5X+3$의 평균을 구하시오. [3점]

23. 네 학생 A, B, C, D가 각각 자신의 수학 교과서를 한 권씩 꺼내어 4권을 섞어 놓고, 한 권씩 임의로 선택하기로 하였다. D가 먼저 A의 교과서를 선택하였을 때, 나머지 세 학생이 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

24. 한 변의 길이가 70 cm 인 정육면체 모양의 상자에 한 변의 길이가 10 cm 인 정육면체 모양의 나무 블록을 다음 규칙에 따라 빈틈없이 가득 채우려고 한다.



n 번째에 넣는 나무 블록의 개수를 a_n이라 할 때, (가) $a_1 = 10$ (나) $a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{2}\right] + 3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$ (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) (다) 상자를 가득 채우면 나무 블록 넣기를 멈춘다.

k 번째에 상자를 가득 채웠다고 할 때, k의 값을 구하시오. (단, 상자의 두께는 무시한다.) [4점]

25. 자연수 n에 대하여

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \left({}_{2k}\mathrm{C}_1 + {}_{2k}\mathrm{C}_3 + {}_{2k}\mathrm{C}_5 + \cdots + {}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1} \right)$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

26. 좌표평면에서 직선 $x - 3y + 3 = 0$ 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 자연수인 모든 점의 좌표를 각각

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,\ (a_n,\ b_n),\ \cdots$$

이라 할 때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n}$ 의 값은?
(단, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

27. 이산확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$\frac{1}{4}$	q	$\frac{1}{12}$	1

X의 분산이 1이 되는 p와 q에 대하여 $3p+q$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

28. 두 함수 $f(x)=\log x$, $g(x)=10^x$ 과 실수의 부분집합 C에 대하여 두 집합 A, B를 각각

$$A=\{x \mid f(x)\in C\},\ B=\{x \mid g(x)\in C\}$$

라고 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $C=\left\{\frac{1}{10},\ 1,\ 10\right\}$이면 $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$이다.

ㄴ. 집합 C가 자연수 전체의 집합이면 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀있다.

ㄷ. 집합 C가 공집합이 아니면 $\{g(x) \mid x\in C\}=A$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 어느 나라의 기상청에서는 기온이 T(℃)이고 풍속이 v(km/시간)일 때, 체감온도 B(℃)를 다음과 같이 계산하여 발표한다.

$$B=14+0.6T+(0.4T-12)v^{0.16}$$

기온이 -15℃이고 풍속이 x(km/시간)인 경우, 이 기상청에서 체감온도가 -25℃라고 발표하였을 때, x의 값은? (단, 다음 로그표를 사용하고, 계산은 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.) [4점]

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\log x$	0.30	0.34	0.38	0.42	0.45	0.48

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

단답형

30. 어느 회사에서는 신입사원 300명에게 연수를 실시하고 연수 점수에 따라 상위 36명을 뽑아 해외 연수의 기회를 제공하고자 한다. 신입사원 전체의 연수 점수가 평균 83점, 표준편차 5점인 정규분포를 따른다고 할 때, 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 연수 점수는 최소 0점에서 최대 100점 사이의 정수이다.) [4점]

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.34
1.1	0.36
1.2	0.38
1.3	0.40

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.