수학 영역

가형 정답

1	②	2	④	3	③	4	③	5	⑤
6	②	7	⑤	8	④	9	③	10	②
11	①	12	⑤	13	②	14	④	15	③
16	①	17	①	18	⑤	19	②	20	⑤
21	④	22	5	23	2	24	3	25	15
26	242	27	11	28	10	29	54	30	4

해 설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$\log_3 9 = 2$

2. [출제의도] 지수 계산하기
$(2^3 \times 2)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} = 4$

3. [출제의도] 함수의 극한 계산하기
$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$

4. [출제의도] 부채꼴의 호의 길이 이해하기
반지름의 길이 $r=4$, 중심각의 크기 $\theta = \frac{\pi}{6}$
부채꼴의 호의 길이 $r\theta = 4\times\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\displaystyle\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x) = 4+2 = 6$

6. [출제의도] $\sum$의 성질을 활용하여 수열의 합 이해하기
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(2a_n - b_n) = 7$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n) = 5$이므로
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\{(2a_n-b_n)+(a_n+b_n)\} = 7+5$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}3a_n = 12$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n = 4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n = 1$이므로
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{10}a_n - 2\sum_{n=1}^{10}b_n = 2$

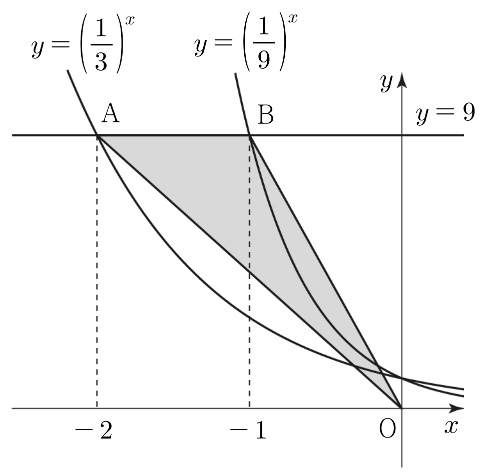
7. [출제의도] 사인법칙 이해하기
사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2\times 5$이므로
$\overline{BC} = 2\times 5\times\sin\frac{\pi}{4} = 2\times 5\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

8. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기
$\tan\theta = \frac{3}{4}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\sin\theta = \frac{3}{5}$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + 2\sin(\pi-\theta) = \sin\theta + 2\sin\theta = 3\sin\theta = \frac{9}{5}$$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기
$a_1 = 6$, $a_2 = 6+3$, $a_3 = 6+3+3^2$,
$a_4 = 6+3+3^2+3^3$
따라서 $a_4 = 45$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기
함수 $f(x) = \log_2(x^2-4x+20)$의 밑이 1보다 크므로 진수 $(x^2-4x+20)$이 최소일 때, 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$x^2-4x+20 = (x-2)^2+16$이므로
$-3 \le x \le 3$에서
$x^2-4x+20$은 $x=2$일 때, 최솟값 16을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\log_2 16 = 4$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기
곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$이 직선 $y=9$와 만나는 점의 x좌표는 -2이므로 $\mathrm{A}(-2,\ 9)$
곡선 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$이 직선 $y=9$와 만나는 점의 x좌표는 -1이므로 $\mathrm{B}(-1,\ 9)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 9 = \frac{9}{2}$

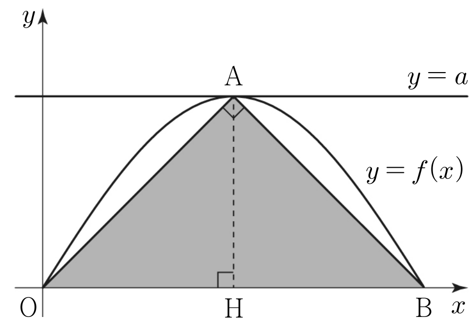


12. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질 이해하기
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x} = 10$ 이므로
$f(x) = 3x^2+10x+a$ (a는 상수)
$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 20$ 이므로
$3+10+a = 20$ 즉, $a=7$
$f(x) = 3x^2+10x+7$
따라서 $f(0) = 7$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
점 A의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 $\overline{AH} = 1$이므로
점 C의 좌표는 $(2,\ a)$
$a^2 - a = a$ $(a>1)$이므로 $a=2$
$|2^0-2| = |-1| = 1$이므로
점 B의 좌표는 $(0,\ 1)$
따라서 $\overline{BC} = \sqrt{5}$

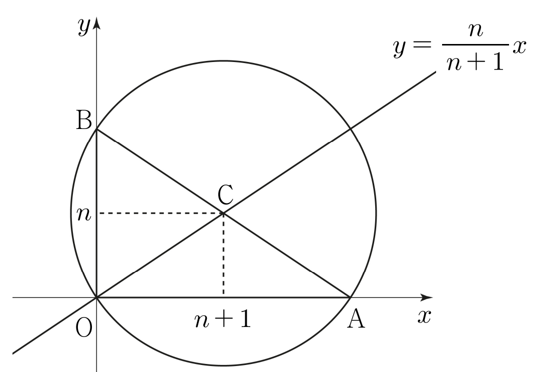
14. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
세 항 a_2, a_5, a_{14}가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(a_5)^2 = a_2\times a_{14}$
$(a+4d)^2 = (a+d)(a+13d)$
$3d^2 = 6ad$
$d\ne 0$이므로 $d=2a$
$\frac{a_{23}}{a_3} = \frac{a+22d}{a+2d} = \frac{45a}{5a} = 9$

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기
함수 $f(x) = a\sin bx$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이므로
두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2b},\ a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{b},\ 0\right)$
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{OH} = \overline{BH} = \overline{AH} = a$이므로 $\frac{\pi}{b} = 2a$
삼각형 OAB의 넓이는 4이므로
$\frac{1}{2}\times 2a\times a = 4$ 즉, $a=2$
$b = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{4}$
따라서 $a+b = 2+\frac{\pi}{4}$



16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
i) $n=1,\ 2$일 때,
$\frac{3}{n} > 1$이므로 방정식 $\sin x = \frac{3}{n}$의 실근의 개수
$a_1 = a_2 = 0$
ii) $n=3$일 때,
$\frac{3}{n} = 1$이므로 방정식 $\sin x = \frac{3}{n}$의 실근의 개수
$a_3 = 2$
iii) $n\ge 4$일 때,
자연수 $k\ (k\ge 2)$에 대하여
$a_n = \begin{cases} n & (n=2k) \\ n+1 & (n=2k+1)\end{cases}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n = 0+0+2+4+6+6+8 = 26$

17. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기



$\angle\mathrm{BOA} = \frac{\pi}{2}$이므로 선분 AB는 원의 지름이다.
원의 중심을 C라 하면, 점 C는 선분 AB의 중점이고, $\overline{OB} = 2n$이므로 점 C의 y좌표는 n이다. 점 C는 직선 $y = \frac{n}{n+1}x$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $(n+1,\ n)$이다.
$S_n = \frac{1}{2}\times 2n\times 2(n+1) = 2n(n+1)$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n(n+1)}$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

일반항이 $a_n = n^2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)S_n - \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 \ \cdots\cdots\ (\ast)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,
(좌변)$=2S_1 - S_1 = 1$, (우변)$=1$ 이므로
$(\ast)$이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 $(\ast)$이 성립한다고 가정하면
$(m+1)S_m - \sum_{k=1}^{m} S_k = \sum_{k=1}^{m} k^3$ 이다.
$n=m+1$ 일 때 $(\ast)$이 성립함을 보이자.

$(m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k$

$= (m+2)S_{m+1} - \left(\sum_{k=1}^{m} S_k + S_{m+1}\right)$

$= \boxed{(m+1)}\, S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} S_k$

$= (m+1)(S_m + a_{m+1}) - \sum_{k=1}^{m} S_k$

$= \boxed{(m+1)}\, S_m + \boxed{(m+1)^3} - \sum_{k=1}^{m} S_k$

$= \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3$

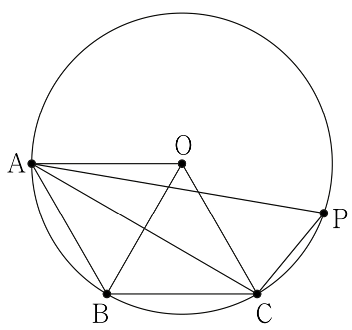
$= \sum_{k=1}^{m+1} k^3$ 이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(\ast)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$f(m) = m+1$, $g(m) = (m+1)^3$

$f(2) + g(1) = 11$

19. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 O 라 하자.

두 삼각형 OAB 와 OBC 는 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$

삼각형 ABC 에서 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ 이므로

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2\times 3\times 3\times \cos\frac{2\pi}{3} = 27$

$\overline{AC} = 3\sqrt{3}$

사각형 ABCP 가 원에 내접하므로

$\angle ABC + \angle APC = \pi$ 즉, $\angle APC = \frac{\pi}{3}$

$\overline{AP} = x$, $\overline{CP} = y$ 라 하면

삼각형 ACP 에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$27 = (x+y)^2 - 3xy$

$x+y = 8$ 이므로 $xy = \frac{37}{3}$

삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 3\times \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ACP 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times x\times y\times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{37\sqrt{3}}{12}$

따라서 사각형 ABCP 의 넓이는

$\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{37\sqrt{3}}{12} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

20. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. n 이 홀수이면 항의 개수가 홀수이고
3 이 2 와 4 의 등차중항이므로 $3 \in A_n$ (참)

ㄴ. $4 = 2 + (n+1)d_1$ 이라 하면, 집합 A_n 의
모든 원소 $2,\ 2+\frac{2}{n+1},\ \cdots,\ 2+\frac{2n}{n+1},\ 4$
는 공차가 $d_1 = \frac{2}{n+1}$ 인 등차수열이다.
$4 = 2 + (2n+2)d_2$ 라 하면, 집합 A_{2n+1} 의
모든 원소 $2,\ 2+\frac{1}{n+1},\ \cdots,\ 2+\frac{2n+1}{n+1},\ 4$
는 공차가 $d_2 = \frac{1}{n+1}$ 인 등차수열이다.
즉, $A_n \subset A_{2n+1}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여
$A_{2n+1} - A_n$
$= \left\{2+\frac{1}{n+1},\ 2+\frac{3}{n+1},\ \cdots,\ 2+\frac{2n+1}{n+1}\right\}$
$S_n = \frac{n+1}{2}\left(2+\frac{1}{n+1}+2+\frac{2n+1}{n+1}\right)$
$= 3(n+1)$
$S_6 + S_{13} = 21 + 42 = 63$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = \frac{(2m-1)\{2a+(2m-2)d\}}{2}$

$= (2m-1)\{a+(m-1)d\} = 0$

$2m-1 > 0$ 이므로 $a + (m-1)d = 0$

즉, $a_m = 0$

조건 (나)에 의하여

$\sum_{n=1}^{15} a_n \neq \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이고 $\sum_{n=1}^{15} a_n > 0$ 이므로

$a_m = 0$ 을 만족시키는 m 의 범위는 $m \le 7$

수열의 항	항의 개수
$-(m-1)d,\ \cdots,\ -2d,\ -d$	$(m-1)$ 개
$0(=a_m)$	1 개
$d,\ 2d,\ \cdots,\ (m-1)d$	$(m-1)$ 개
$md,\ (m+1)d,\ \cdots,\ a_{15}$	$(16-2m)$ 개

$\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{15} a_n = \frac{(16-2m)\{2md+(15-2m)d\}}{2}$

$= 15(8-m)d = 45$

즉, $(8-m)d = 3$

$\sum_{n=1}^{15} |a_n|$

$= 2\times\frac{(m-1)\{d+(m-1)d\}}{2} + 15(8-m)d$

$= (m-1)md + 45 = 90$

$2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이므로

$15(8-m)d = (m-1)md$

$m^2 + 14m - 120 = 0$

$(m-6)(m+20) = 0$

m 은 자연수이므로 $m = 6$

$\sum_{n=1}^{15} a_n = 30d = 45$ 즉, $d = \frac{3}{2}$

따라서 $a_{14} = a_6 + 8d = 0 + 12 = 12$

22. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$8\sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4} = 8\times\frac{1}{2} + 1 = 5$

23. [출제의도] 상용로그 계산하기

$\log 20 + \log 5 = \log 100 = 2$

24. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$3^x - 3^{4-x} = 24$ 이므로

$(3^x)^2 - 24\times 3^x - 81 = 0$

$(3^x+3)(3^x-27) = 0$

$3^x = -3$ 또는 $3^x = 27$

$3^x > 0$ 이므로 $x = 3$

25. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

모든 실수 x 에 대하여

$\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$ 가 음수가 되려면

$-x^2 + 2ax - 6a < 0$

즉, $x^2 - 2ax + 6a > 0$

이차방정식 $x^2 - 2ax + 6a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$\frac{D}{4} = a^2 - 6a = a(a-6) < 0$

$0 < a < 6$ 이므로 $a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서 $1+2+3+4+5 = 15$

26. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하자.

$5 \le a_2 \le 6$ 에 의하여 $5 \le ar \le 6$ 이고

a 와 r 는 자연수이므로 $ar = 5$ 또는 $ar = 6$

$42 \le a_4 \le 96$ 에 의하여 $42 \le ar^3 \le 96$ 이므로

$\frac{42}{ar} \le r^2 \le \frac{96}{ar}$ ⋯㉠

i) $ar = 5$ 일 때,

㉠에 의하여 $\frac{42}{5} \le r^2 \le \frac{96}{5}$

$r = 3$ 또는 $r = 4$

$ar = 5$ 를 만족시키는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

ii) $ar = 6$ 일 때,

㉠에 의하여 $7 \le r^2 \le 16$ 이므로

$r = 3$ 또는 $r = 4$

$ar = 6$ 을 만족시키는 자연수 $r = 3$, $a = 2$

따라서 $\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{2\times(3^5-1)}{3-1} = 242$

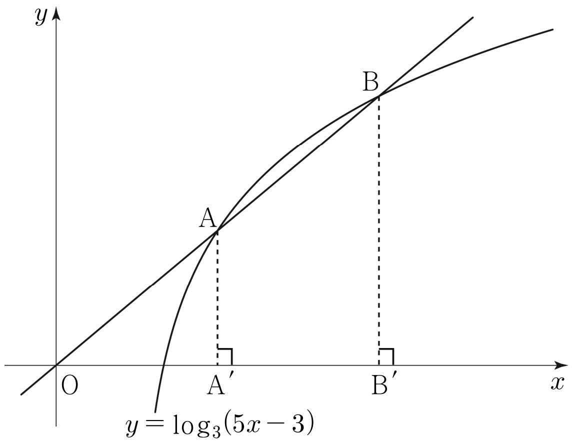
27. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′ 이라 하자.

삼각형 AOA′ 과 삼각형 BOB′ 은 닮음이므로

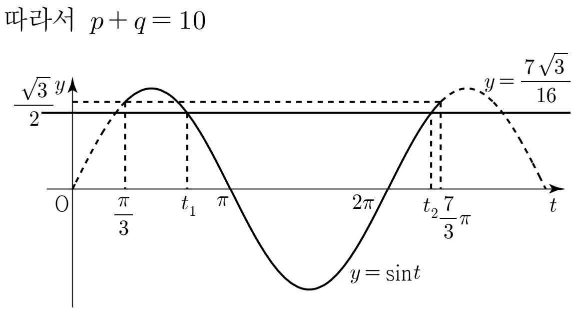
$\overline{OA'} : \overline{OB'} = \overline{AA'} : \overline{BB'} = 1:2$

점 A 의 좌표를 $(a,\ \log_3(5a-3))$이라 하면
점 B 의 좌표는 $(2a,\ \log_3(10a-3))$
$2\log_3(5a-3)=\log_3(10a-3)$
$25a^2-30a+9=10a-3$
$25a^2-40a+12=(5a-2)(5a-6)=0$ 이므로
$a=\frac{2}{5}$ 또는 $a=\frac{6}{5}$
$a>\frac{3}{5}$ 이므로 $a=\frac{6}{5}$ 즉, 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{6}{5},\ 1\right)$
직선 AB 의 기울기는 직선 OA 의 기울기와 같다.
직선 OA 의 기울기 $\frac{q}{p}=\frac{1-0}{\frac{6}{5}-0}=\frac{5}{6}$
따라서 $p+q=11$



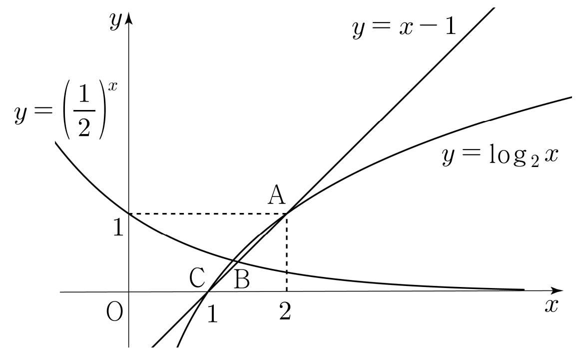
28. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{8}=0$ 에서
$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{16}$
$t=x+\frac{\pi}{3}$ 라 하면 $\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{7}{3}\pi$
$\frac{7\sqrt{3}}{16}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로
방정식 $\sin t=\frac{7\sqrt{3}}{16}\ \left(\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{7}{3}\pi\right)$는 두 실근 $t_1,\ t_2\ (t_1<t_2)$를 갖는다.
$t_1=x_1+\frac{\pi}{3},\ t_2=x_2+\frac{\pi}{3}\ \ (x_1,\ x_2$는 실수)라 하면
$t_2=2\pi+(\pi-t_1)$이므로
$t_1+t_2=\left(x_1+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x_2+\frac{\pi}{3}\right)=3\pi$
방정식 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{16}$ 의 모든 실근의 합은
$x_1+x_2=3\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$
따라서 $p+q=10$

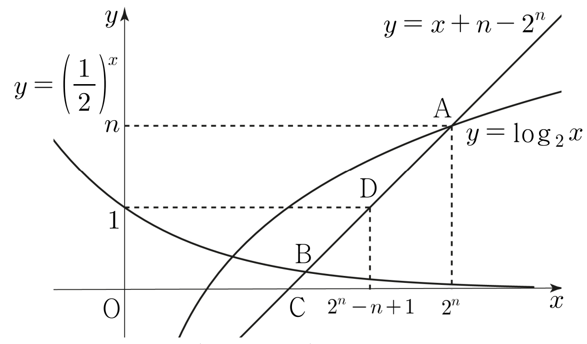


29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

직선 $y=x+n-2^n$ 이 x 축과 만나는 점을 C 라 하자.
i) $n=1$ 일 때,



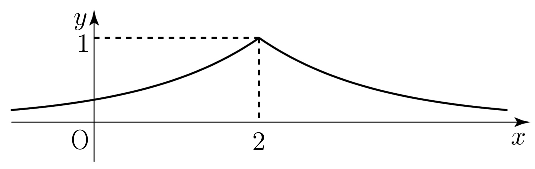
점 A$(2,\ 1)$, 점 C$(1,\ 0)$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{2}$
$\overline{AB}<\overline{AC}$ 이므로 $\overline{AB}<\sqrt{2}$
따라서 $n=1$ 일 때 주어진 식을 만족시키지 않는다.
ii) $n\ge2$ 일 때,



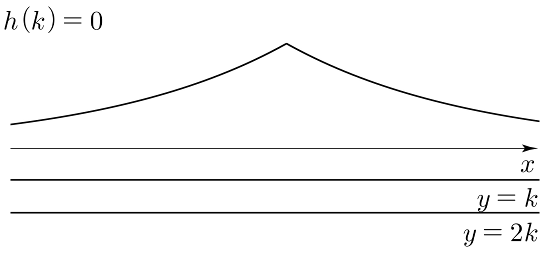
점 C 의 좌표는 $(2^n-n,\ 0)$
직선 $y=x+n-2^n$ 이 직선 $y=1$ 과 만나는 점을 D 라 하면, 점 D 의 좌표는 $(2^n-n+1,\ 1)$
$\overline{AD}<\overline{AB}<\overline{AC}$ 이고
$\overline{AD}=(n-1)\sqrt{2}$, $\overline{AC}=n\sqrt{2}$
즉, $n-1<\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<n$
i), ii)에 의하여
$1<\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<10$ 을 만족시키는 자연수 n 은
2, 3, 4, ⋯ , 10 이다.
따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은 54

30. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

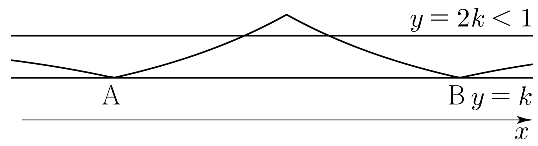
함수 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\ge2)\end{cases}$ 의 그래프는 아래와 같다.



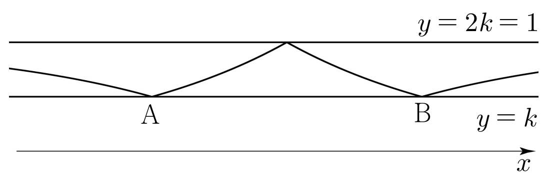
$g(x)=|f(x)-k|+k$
$\quad=\begin{cases}f(x) & (f(x)\ge k)\\ -f(x)+2k & (f(x)<k)\end{cases}$
i) $k\le0$ 일 때,
$f(x)>k$ 이므로 $g(x)=f(x)>0\ge2k$
함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2k$ 의 그래프가 만나는 점이 없다.
$h(k)=0$



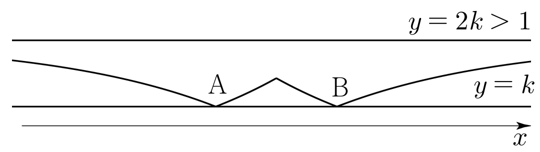
ii) $0<k<\frac{1}{2}$ 일 때,
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하면, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.
$h(k)=2$



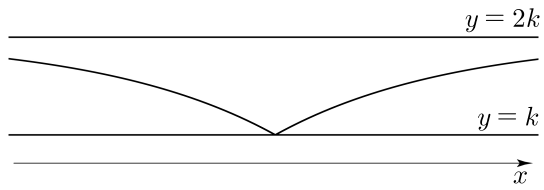
iii) $k=\frac{1}{2}$ 일 때,
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하면, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.
$h\left(\frac{1}{2}\right)=1$



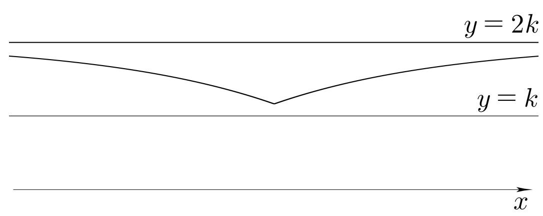
iv) $\frac{1}{2}<k<1$ 일 때,
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하면, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.
$h(k)=0$



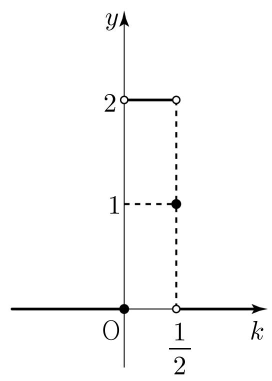
v) $k\ge1$ 일 때,
$g(x)=-f(x)+2k<2k$ 이므로
$h(k)=0$
① $k=1$ 인 경우



② $k>1$ 인 경우



따라서 $y=h(k)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$\lim_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)=2$ 이고 $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}h\left(k+\frac{1}{4}\right)=2$
따라서 $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)=4$